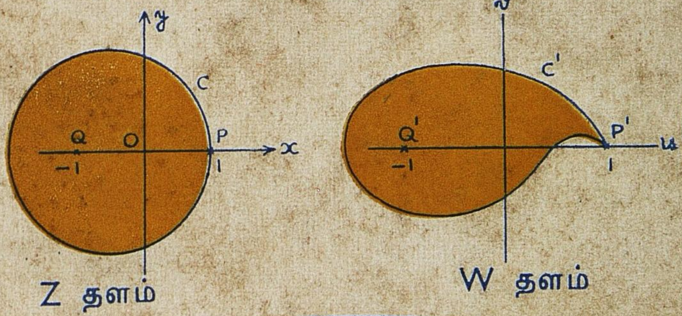
…லப்பெண் மாறிகளின் பகுஇயல்

…DVANCED ANALYSIS OF COMPLEX VARIABLES)

ஜே. டி. சாமுவேல்



தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

த. பா. நி. (க.வெ.) வரிசை எண் 730

கலப்பெண் மாறிகளின் பகு இயல்

(பட்டப் படிப்பிற்குரியது)

(திருத்தப்பட்ட பாடத்திட்டத்தின்படி வெளியிடப்படுகிறது)

ஆசிரியர்
ஜே. டி. சாமுவேல், எம்.ஏ., எம்.எஸ். (இல்லினாய்ஸ்),
தலைமைப் பேராசிரியர், கணிதத்துறை,
பிஷப் ஹீபர் கல்லூரி,
திருச்சிராப்பள்ளி,

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition—November, 1976

T.N.T.B.S. (C.P.) No. 730

© Government of Tamilnadu

ADVANCED ANALYSIS OF COMPLEX VARIABLES

J. D. SAMUEL

Price Rs. 7-30

Published by the Tamilnadu Textbook Society under the Centrally Sponsored Scheme of Production of books and literature in regional languages at the University level, of the Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare (Department of Culture), New Delhi.

Printed out of the Paper allotted by the Government of India.

Printed by
Metropolitan Printers,
Madras-600 002

பதிப்புரை

கலப்பெண் மாறிகளின் பகு இயல் என்ற இந் நூல், தமிழ்நாட்டுப் பாட நூல் நிறுவனத்தின் 730 ஆவது வெளியீடாகும். கல்லூரித் தமிழ்க் குழுவின் சார்பில் வெளியான 35 நூல்களையும் சேர்த்து இதுவரை 765 நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன. இந் நூல் மைய அரசு, கல்வி, சமூக நல அமைச்சகத்தின் 'மாநில மொழியில் பல்கலைக் கழக நூல்கள் வெளியிடும் திட்டத்'தின்கீழ் வெளியிடப்படுகிறது.

மேலாண்மை இயக்குநர்

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

பொருளடக்கம்

		பக்கம்
1. கலப்பு எண்கள்	...	1
2. பகு முறைச் சார்புகள்	...	26
3. அடுக்குத் தொடர்	...	63
4. தொகை காணல்	...	77
5. எச்சத் தேற்றத்தால் தொகை காணல்	...	133
6. கோணம் மாறு மாற்றம்	...	218
மேற்கோள் நூற்பட்டியல்	...	300
கலைச்சொற்கள்	...	301

1. கலப்பு எண்கள்

1·1. கலப்பு எண் என்றால் என்ன?

$x^2+x+1=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வைக் காண மெய்யெண்கள் போதாது என்பது தெளிவு. ஏனெனில் $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ என்ற சூத்திரத்தின் உதவியால், இதன் மூலங்கள் $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ அல்லது $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ என அறிவோம். $i=\sqrt{-1}$ எனக்கொண்டு, இவற்றை $\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$ என எழுதுவது வழக்கம். இவை கலப்பெண்களின் உதாரணங்களாகும். பொதுவாக, x, y என்பன மெய்யெண்களாக இருந்தால் $x+iy=z$ என்பது ஒரு கலப்பெண் ஆகும். இதில் x-ஐ மெய்ப்பகுதி என்றும் y-ஐக் கற்பனைப் பகுதி என்றும் சொல்வோம். (ஆனால், x-ம் y-ம் மெய்யெண்கள் என்பதை நோக்குக.) இவற்றை $x=R(z)$, $y=I(z)$ எனக் குறிப்பிடுவது வழக்கம்.

குறிப்பு: (i) $y=0$ ஆனால் z ஒரு மெய்யெண் ஆகும்.

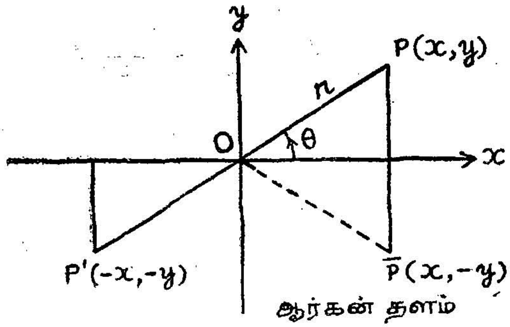
(ii) $x=0$ ஆனால் z ஒரு கற்பனையெண் ஆகும்.

(iii) $x=0, y=0$ ஆனால் z பூச்சியத்தைக் குறிக்கும்.

1·2. ஆர்கன் படத்தில் கலப்பெண்ணைக் குறித்தல்

வழக்கம்போல் O என்ற ஆதியையும், Ox, Oy என்ற செங்குத்து அச்சுகளையும் எடுத்துக் கொள்வோம். இப்பொழுது x-அச்சை மெய்யச்சு என்றும், y-அச்சைக் கற்பனை அச்சு என்றும் சொல்வோம். xOy தளத்தை ஆர்கன் தளம் என்றும் அழைப்போம். இதில் உள்ள $P(x,y)$ என்ற புள்ளியானது $x+iy$ என்ற கலப்பெண்ணைக் குறிக்கும். கொடுக்கப்பட்ட ஒரு கலப்பெண்ணை ஆர்கன் தளத்தில் உள்ள ஒரே ஒரு புள்ளிதான் குறிக்கும் என்பதும், அதுபோல் ஆர்கன் தளத்தில் உள்ள ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளிக்கிசைய ஒரே ஒரு கலப்பெண் தான் இருக்க

முடியும் என்பதும் நோக்கற்பாலது. அதாவது, கலப்பெண்களின் கணமும், ஆர்கன் தளத்தில் உள்ள புள்ளிகளின் கணமும் ஒன்றுக்கொன்றுன ஒத்த இயைபு உள்ளன.



படம்—1.

1·3. கலப்பெண்ணின் மட்டும், வீச்சமும்

$z=x+iy$ என்ற கலப்பெண்ணின் மட்டு அல்லது எண்ணளவு தனை $\sqrt{x^2+y^2}$ என வரையறுக்கிறேம். இதை $|z|$ எனக் குறிப்பிடுவோம். எனவே,

$$|x+iy| = \sqrt{x^2+y^2} \text{ ஆகும்.}$$

ஒரு கலப்பெண்ணின் மட்டு பூச்சியமாஞல், $x=0$ ஆகவும், $y=0$ ஆகவும் இருக்க வேண்டும். அதாவது, அந்த எண் பூச்சிய மாக இருக்கவேண்டும்.

ஆர்கன் தளத்தில், $OP=r=\sqrt{x^2+y^2}$ என்பது z-ன் மட்டு வைக் குறிக்கும்.

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \; ; \; \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

என்ற இரு சமன்பாடுகளுக்கும் இசைய உள்ள கோணம் θஐ zன் வீச்சம் என வரையறை செய்வோம். இது $-\pi$-க்கும், $+\pi$-க்கும் இடையிலிருந்தால், இதனை வீச்சத்தின் முதல் மதிப்பு என்று சொல்வோம். n என்பது ஒரு முழு மெய்யெண் ஆஞல், $\theta \pm 2n\pi$ என்பது வீச்சத்தின் பொது மதிப்பு ஆகும்.

ஆர்கன் படத்தில் $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ என்பது தெளிவு. எனவே, ஒரு கலப்பெண்ணை அதன் மட்டு, வீச்சம் என்புவைகளின் சார்பாக

$$z = r\ (\cos\theta + i\sin\theta)$$

என எழுதலாம்.

குறிப்பு : $z = x + iy$ என்ற கலப்பெண்ணை OP என்ற வெக்டர் (vector) ஆகவும் கருதலாம். O என்பது ஆதி. P ஐ முடிவு புள்ளியாகக் கொண்ட வெக்டர் நிலை (Position vector) தான் OP.

1·4. சமமான கலப்பெண்கள்

இரு கலப்பெண்களின் மெய்ப்பகுதிகளும், கற்பனைப் பகுதிகளும் தனித்தனியே சமமானால் அவ்விரு கலப்பெண்களும் சமமாகும். அதாவது, $x + iy = x' + iy'$ ஆக இருப்பதற்கு வேண்டிய போதுமான நிபந்தனைகள் $x = x'$ ஆகவும், $y = y'$ ஆகவும் இருக்கவேண்டும் என்பதாகும்.

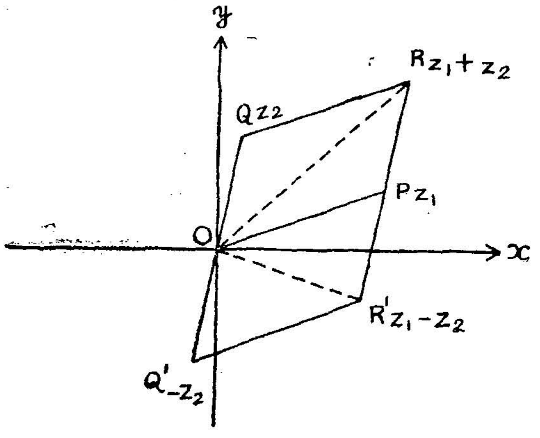
இச் சந்தர்ப்பத்தில், இரு கலப்பெண்களில் எது பெரியது ? எது சிறியது ? என வரையறை செய்ய இயலாது எனக் குறிப்பிடுவது தகும்.

1·5. கலப்பெண்களைக் கொண்டு அடிப்படைச் செயல்கள்

I. கலப்பெண்களைக் கூட்டல்.

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2)$$

என வரையறை செய்வோம்.



படம்—2.

ஆர்கன் படத்தில் O, P, Q என்பவை முறையே ஆதியாகவும், $x_1 + iy_1$, $x_2 + iy_2$ என்ற புள்ளிகளாகவும் இருக்கட்டும். $OPRQ$

ஓர் இணைகரமாக இருக்கும்படி R என்ற புள்ளியை எடுத்துக் கொள். R என்பது $(x_1+x_2) + i\,(y_1+y_2)$ என்ற புள்ளியைக் குறிக்கும் என எளிதாக நிரூபிக்கலாம். இந்த நிரூபணம் உங்கள் பயிற்சிக்கென விடப்பட்டுள்ளது.

$z=x+iy$ என்ற கலப்பெண்ணின் நேர்மாறான கூட்டுறுப்பு $z'=-x-iy$ ஆகும். ஏனெனில், $z+z'=0$. OP என்னும் நேர் கோட்டில், P' என்னும் புள்ளியை $PO=OP'$ என்பதற்கிணங்க எடுத்தால் P' ஆனது P யின் நேர்மாறான கூட்டுறுப்பு ஆகும். (படம் 1 ஐப் பார்க்கவும்)

இனி, z_1லிருந்து z_2ஐக் கழிப்பதை, z_1 உடன்$(-z_2)$ஐக் கூட்டுவதாகக் கருதலாம். $\therefore z_1-z_2 = (x_1-x_2) + i\,(y_1-y_2)$. படம் 2-ல் Q' ஆனது Q-ன் நேர்மாறான கூட்டுறுப்பாகும். $OPR'Q'$ ஓர் இணைகரமாதலின் R' ஆனது z_1-z_2ஐக் குறிக்கும். இதன் நிரூபணமும் உங்கள் பயிற்சிக்கென விடப்பட்டுள்ளது.

(i) $|z_1+z_2| \le |z_1| + |z_2|$

(ii) $|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2\{|z_1|^2 + |z_2|^2\}$ என வரைபடம் மூலம் விளக்குக.

படம் 2 ஐப் பார்க்கவும்.

(i) $OR \le OP+PR$

$\le OP+OQ \quad \because OPRQ$ ஒரு இணைகரம்.

$\therefore |z_1+z_2| \le |z_1| + |z_2|$

(ii) $\triangle ROR'$ என்ற முக்கோணத்தில் அப்பொலோனியஸ் தேற்றத்தின்படி

$$OR^2+OR'^2 = 2(OP^2+PR^2)$$

$$= 2(OP^2+OQ^2)$$

$$\therefore |z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2\{|z_1|^2+|z_2|^2\}$$

II. கலப்பெண்களைப் பெருக்கல்.

$(x_1+iy_1)\times(x_1+iy_2) = (x_1x_2 \quad y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$ என வரையறை செய்வோம்.

இதிலிருந்து வகுத்தலை எவ்வாறு வரையறை செய்வது என்று காண்போம்.

$$\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2} = x+iy \text{ ஆனால்}$$

$$x_1+iy_1 = (x+iy)(x_2+iy_2)$$
$$= xx_2-yy_2 + i(xy_2+x_2y)$$
$$\therefore x_1 = xx_2-yy_2$$
$$y_1 = xy_2+x_2y \quad \text{(1·4-ல் உள்ள சமத்துவ விதிப்படி)}$$

$$\therefore x = \frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\ ;\ y = \frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$$

$$\therefore \frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2} = \frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} + i\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$$

இதில் $|z_2| \neq 0$ ஆக இருக்க வேண்டும். ஏன்? இதில் $z_1 = 1+i0$ எனவும், $z_2=x+iy$ எனவும் கொண்டால் $\frac{1}{z_2} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$ என்பதை நோக்குக. மேலும், k ஒரு மெய்யெண் ஆனால், $k(x+iy)=kx+iky$ ஆகும்.

குறிப்பு : வகுத்தலைக் காணப் பின்வரும் வேறு முறையும் நோக்கற்பாலது.

$$\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2} = x+iy \text{ எனக் கொள்க.}$$

இதன் பகுதியையும், தொகுதியையும் x_2-iy_2 ஆல் பெருக்குக.

$$x+iy = \frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}$$
$$= \frac{(x_1x_2+y_1y_2) + i(x_2y_1-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2}$$

எனவே, $$x = \frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$$
$$y = \frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$$

1·6. டிமாவரின் தேற்றம்

$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\ ;\ z_2 = r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ என இருக்கட்டும். அப்படியானால்,

$$z_1z_2=r_1r_2(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$
$$z_1z_2=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)] \ldots (1)$$

இதிலிருந்து இரு கலப்பெண்களின் பெருக்கலின் மட்டு, அக்கலப் பெண்களின் மட்டுகளின் பெருக்குத் தொகைக்குச் சமம் என்றும்; பெருக்கற் பலனின் வீச்சமானது அக்கலப்பெண்களின் வீச்சங் களின் கூடுதலுக்குச் சமம் என்றும் அறிகிறோம். அதாவது,

(i) $|z_1z_2| = |z_1| \quad |z_2|$

(ii) வீச்சம் (z_1z_2) = வீச்சம் (z_1) + வீச்சம் (z_2)

n ஒரு முழுஎண் எனில், $(\cos\theta_1+i\sin\theta_1), (\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\ ..$ $(\cos\theta_n+i\sin\theta_n)$

$=\cos(\theta_1+\theta_2+\dots+\theta_n)+i\sin(\theta_1+\theta_2+\dots+\theta_n)$ ஆகும்.

இதில் $\theta=\theta_1=\theta_2=\dots=\theta_n$ ஆனால்

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta.$$

என்பது டிமாவரின் தேற்றமாகும். இது n ஆனது பின்னமாக இருப்பினும் குறையெண்ணாக இருப்பினும் உண்மையாகும் என நிரூபிக்கவும்.

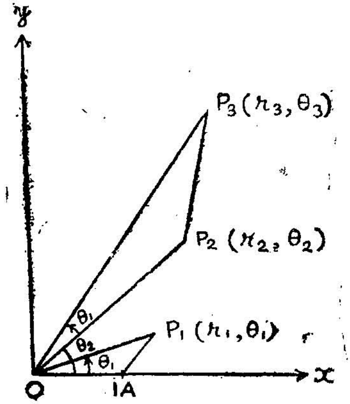
இதே விதமாக, $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]$

என நிரூபிக்கலாம். எனவே,

(iii) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

(iv) வீச்சம் $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)$ = வீச்சம் z_1 − வீச்சம் z_2.

1·7. வரைபடம் மூலம் பெருக்கற்பலன் காணல்



படம்—3.

$OP_1=r_1$ ஆகவும் $\angle P_1Ox=\theta_1$, ஆகவும் இருக்கும்படி OP_1 வரை. இதே விதமாக, $OP_2=r_2$, $P_2Ox=\theta_2$ ஆக இருக்கும்படி OP_2 வரை. A என்னும் புள்ளியை மெய்யச்சில் $OA=1$ ஆக இருக்கும்படி எடுத்துக் கொள்.

OP_3P_2 என்றமுக்கோணத்தை OP_1A என்ற முக்கோணத்திற்கு நேரிடையாக வடிவொத்ததாக (directly similar) இருக்கும்படி வரை.

$$\therefore \frac{OP_3}{OP_1} = \frac{OP_2}{OA}$$

$$\therefore OP_3 = \frac{OP_1 . OP_2}{OA} = \frac{r_1 r_2}{1} = r_1 r_2.$$

மேலும் $\angle P_3Ox = \angle P_3OP_2 + \angle P_2Ox$

$= \angle P_1Ox + \angle P_2Ox$

$= \theta_1 + \theta_2.$

$\therefore$ P_3 ஆனது z_1z_2ஐக் குறிக்கும்.

பயிற்சி : வகுத்தலை விளக்கும் வரைபடம் வரைக.

(குறிப்பு: z_1/z_2 ஐக் கண்டுபிடிக்க OP_1Aஐ OP_3P_2-க்கு நேரிடையாக வடிவொத்ததாக வரை. படம் 3ஐப் பார்)

1·8. துணைக் கலப்பெண்

$z = x + iy$ என்ற கலப்பெண்ணினுடைய, துணைக்கலப்பெண் $\bar{z} = x - iy$ என வரையறை செய்வோம். இதிலிருந்து,

$(\bar{\bar{z}}) = x - i(-y) = x + iy = z$

என்பதும், "துணை" என்ற பெயர்க் காரணமும் விளங்குகின்றன. மேலும், (படம் 1 ஐப்பார்) $\bar{z}$ ஆனது மெய்யச்சில் zன் பிம்பம் என்பதைக் கவனி.

(i) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ (ii) $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$

(iii) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 . \bar{z}_2$ (iv) $\overline{\left\{\frac{z_1}{z_2}\right\}} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

(v) $z + \bar{z} = 2R(z) = 2x$

(vi) $\frac{z - \bar{z}}{2i} = 2I(z) = 2y$

(vii) $z\bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$

என்பவைகளை எளிதாக நிரூபிக்கலாம்.

தேற்றம் 1: இரு கலப்பெண்களின் கூடுதலின் மட்டு, அவற்றின் மட்டுகளின் கூடுதலைவிடப் பெரிதல்ல.

அதாவது, $|z_1 + z_2| \ngtr |z_1| + |z_2|$

நிரூபணம் :

$$|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)} \quad \ldots (v)$$
$$= (z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2) \quad \ldots (i)$$
$$= z_1\bar{z}_1+z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2$$
$$\leq |z_1|^2+2|z_1z_2|+|z_2|^2$$
$$\leq (|z_1|+|z_2|)^2$$
$$\therefore \; |z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$$

தேற்றம் 2 : இரு கலப்பெண்களின் வித்தியாசத்தின் (அல்லது கூடுதலின்) மட்டு அவற்றின் மட்டுகளின் வித்தியாசத்தை விடச் சிறிதல்ல. அதாவது,

$$|z_1 \pm z_2| \nless \Big|\, |z_1| - |z_2| \,\Big|$$

நிரூபணம் :

$$|z_1 \pm z_2|^2 = (z_1 \pm z_2)(\bar{z}_1 \pm \bar{z}_2)$$
$$= |z_1|^2 \pm (z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1)+|z_2|^2$$
$$\geq |z_1|^2-2|z_1z_2|+|z_2|^2$$
$$= (|z_1|-|z_2|)^2$$
$$\therefore \; |z_1 \pm z_2| \geq \Big|\, |z_1| - |z_2| \,\Big|$$

தேற்றம் 3 : $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\{|z_1|^2+|z_2|^2\}$

இடப்பக்கம் $= (z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)+(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)$

$$= 2(z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2) = 2\{|z_1|^2+|z_2|^2\}$$

கிளைத்தேற்றம்

$$|\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta^2}|+|\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta^2}| = |\alpha+\beta|+|\alpha-\beta|$$

தேற்றம் 3-ல் இருந்து,

$$|z_1|^2+|z_2|^2=\tfrac{1}{2}\{|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2\} \quad \ldots (1)$$

இதில் $z_1=\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$; $z_2=\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$ எனப் பிரதியிடு.

$$|\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta^2}|^2+|\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta^2}|^2$$
$$=\tfrac{1}{2}\{|2\alpha|^2+|2\sqrt{\alpha^2-\beta^2}|^2\}$$
$$=2\{|\alpha|^2+|\alpha^2-\beta^2|\} \quad \ldots (2)$$

மேலும், $(|z_1|+|z_2|)^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1z_2|$

$=2\{|\alpha|^2+|\alpha^2-\beta^2|\}+2|z_1z_2|$ ...(2)-ல் இருந்து

$=2\{|\alpha|^2+|\alpha^2-\beta^2|\}+2|\beta|^2$

$=2\{|\alpha|^2+|\beta|^2\}+2|\alpha^2-\beta^2|$

$=|\alpha+\beta|^2+|\alpha-\beta|^2+2|\alpha+\beta|\,|\alpha-\beta|$ ... (1)-ல் இருந்து

$=\{|\alpha+\beta|+|\alpha-\beta|\}^2$

$\therefore |z_1|+|z_2|=|\alpha+\beta|+|\alpha-\beta|$

1·9. மற்றோர் வரையறை

இனி, z என்ற கலப்பெண் ஆனது (x, y) என்ற வரிசைப்பட்ட (ordered) மெய்யான இணை எண்கள் என்றும் வரையறை செய்யலாம். இதற்கேற்ப முன் கூறியவற்றை எளிதாக மாற்றி எழுதலாம். உதாரணமாக, சமத்துவ விதியை

$(x_1, y_1)=(x_2, y_2)$ ஆக இருப்பதற்கு வேண்டிய போதுமான நிபந்தனைகள் $x_1=x_2$; $y_1=y_2$ ஆகும் என எழுதலாம்.

மேலும், கூட்டலையும், பெருக்கலையும்

(i) $(x_1, y_1)+(x_2, y_2)=(x_1+x_2, y_1+y_2)$ என்றும்

(ii) $(x_1, y_1)\times(x_2, y_2)=(x_1x_2-y_1y_2, x_1y_2+x_2y_1)$

என்றும் வரையறை செய்யலாம்.

இம்முறையில் (0, 1) ஆனது i என்பதைக் குறிக்கும்.

$$\therefore\quad i^2=(0, 1)\times(0, 1)$$

$$=(0\cdot0-1\cdot1,\ 0\cdot1+1\cdot0)$$

$$=(-1, 0)$$

ஆகவே, i என்பதை -1-ன் வர்க்க மூலமாகக் கொள்ளலாம் என அறிகிறோம்.

1·10. A என்பது a என்ற புள்ளியாகவும், B என்பது b ஆகவும், P என்பது z ஆகவும் இருந்தால்

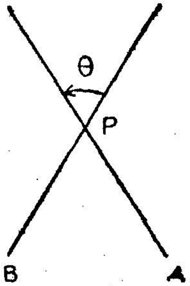
வீச்சம் $\frac{z-a}{z-b} = \angle APB$ என நிரூபி.

$\overrightarrow{AP}$ என்பது $z-a$ ஐயும்

$\overrightarrow{BP}$ என்பது $z-b$ ஐயும்

குறிக்கும் என்பது தெளிவு.

$\therefore$ AP-க்கும், BP-க்கும் இடையே உள்ள கோணம் θ ஆனால்,



படம்—4.

$$\text{வீச்சம் } \overrightarrow{AP} - \text{வீச்சம் } \overrightarrow{BP} = \theta$$

$$\therefore \text{ வீச்சம் } \frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{BP}} = \theta = \text{வீச்சம் } \frac{z-a}{z-b}$$

கிளைத் தேற்றம்: $AP \perp BP$ ஆனால்

$$\text{வீச்சம் } \frac{z-a}{z-b} = \pm\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \frac{z-a}{z-b} = \left|\frac{z-a}{z-b}\right| e^{\pm i\pi/2} = \left|\frac{z-a}{z-b}\right| . i$$

$\therefore$ $\frac{z-a}{z-b}$ ஒரு பூரண கற்பனையெண்ணாகும்.

1·11. $A(z_1)$; $B(z_2)$ வழியே செல்லும் நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி. AB யின் மையப்புள்ளி எது?

$P(z)$ என்பது AB என்ற கோட்டில் இருக்கட்டும்; அப்படியானால்,

$$\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}} = \frac{m}{n}$$

$$\therefore \frac{z-z_1}{z_2-z} = \frac{m}{n}$$

$$\therefore z = \frac{mz_2+nz_1}{m+n}$$

$\therefore$ AB-ன் மையப்புள்ளி $= (z_1+z_2)/2$.

வேறு முறை 1.

வீச்சம் $\dfrac{z-z_1}{z-z_2} = 0$ அல்லது π

$$\therefore \quad \frac{z-z_1}{z-z_2} \text{ என்பது மெய்யெண்} \qquad \dots (1)$$

$$\therefore \quad \frac{z-z_1}{z-z_2} = \frac{\bar{z}-\bar{z}_1}{\bar{z}-\bar{z}_2} \text{ (1·8-ல் (ii), (iv) ஐப்பார்)}$$

$\because$ z மெய்யானால், $z=\bar{z}$

$$\therefore \quad z\bar{z} - z\bar{z}_2 - z_1\bar{z} + z_1\bar{z}_2 = z\bar{z} - z\bar{z}_1 - z_2\bar{z} + z_2\bar{z}_1$$

$$\therefore \quad z(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) - \bar{z}(z_1 - z_2) + z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2 = 0$$

வேறு முறை 2 : (1)-ல் உள்ள மெய்யெண் m ஆனால்

$$\frac{z-z_1}{z-z_2} = m$$

$$\therefore \quad z - z_1 = mz - mz_2$$

i.e. $z(1-m) = z_1 - mz_2$

$\therefore \quad z = \dfrac{z_1 - mz_2}{1-m}$ என்பது வேண்டிய நேர்கோட்டின் சமன்பாடாகும்.

1·12. ஒரு நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டை $\bar{b}z + b\bar{z} + c = 0$ என எழுதலாம் என நிரூபி. இதில் c என்பது மெய்யெண்ணாகும்.

$Ax + By + C = 0$ ஒரு நேர்கோட்டைக் குறிக்கும் என்பது தெரிந்ததே. இதில் A, B, C ஆகியவை மெய்யெண்கள்.

$$\therefore 2Ax + 2By + 2C = 0$$

$$\therefore A(z+\bar{z}) + \frac{B(z-\bar{z})}{i} + 2C = 0$$

$$\therefore z\left(A + \frac{B}{i}\right) + \bar{z}\left(A - \frac{B}{i}\right) + 2C = 0$$

i.e. $z(A-iB) + \bar{z}(A+iB) + 2C = 0$

$$\therefore \bar{b}z + b\bar{z} + c = 0$$

இதில் $b = A - \dfrac{B}{i}$; $c = 2C =$ மெய்யெண்.

1.13. z_2 ஆனது $\bar{b}z+b\bar{z}+c=0$ என்ற கோட்டில் z_1-ன் பிம்பம் ஆனால் $\bar{b}z_1+b\bar{z}_2+c=0$ என நிரூபி.

நிரூபணம் :

z_1, z_2 என்ற புள்ளிகளின் மையக்குத்துக் கோடு

$$\bar{b}z+b\bar{z}+c=0 \qquad \ldots (1)$$

ஆக இருக்க வேண்டும்.

$$\therefore\ |z-z_1|=|z-z_2| \qquad \ldots (2)$$

என்பதும், (1)-ம் ஒரே நேர்க்கோடாகும்.

$$\therefore\ |z-z_1|^2=|z-z_2|^2$$

$$\therefore\ (z-z_1)(\bar{z}-\bar{z}_1)=(z-z_2)(\bar{z}-\bar{z}_2)$$

$$\therefore\ z\bar{z}-z\bar{z}_1-z_1\bar{z}+z_1\bar{z}_1=z\bar{z}-z\bar{z}_2-z_2\bar{z}+z_2\bar{z}_2$$

$$\therefore\ z(\bar{z}_2-\bar{z}_1)+\bar{z}(z_2-z_1)+z_1\bar{z}_1-z_2\bar{z}_2=0 \qquad \ldots (3)$$

இதை (1) உடன் ஒப்பிட்டுப் பார்க்கவும்.

$$\frac{\bar{z}_2-\bar{z}_1}{\bar{b}}=\frac{z_2-z_1}{b}=\frac{|z_1|^2-|z_2|^2}{c}=\lambda$$

இப்பொழுது, $\bar{b}z_1+b\bar{z}_2+c$

$$=\frac{\bar{z}_2-\bar{z}_1}{\lambda}z_1+\frac{z_2-z_1}{\lambda}\bar{z}_2+\frac{|z_1|^2-|z_2|^2}{\lambda}$$

$$=\frac{1}{\lambda}\left\{z_1\bar{z}_2-z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2-z_1\bar{z}_2+|z_1|^2-|z_2|^2\right\}$$

$$=\frac{1}{\lambda}\cdot 0=0$$

1·14. வட்டத்தின் சமன்பாடு :

$$z\bar{z}+b\bar{z}+\bar{b}z+c=0$$

ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கும்.

a என்பது வட்ட மையமாகவும், r என்பது அதன் ஆரமாகவும் இருக்கட்டும். அப்படியானால்,

$$|z-a|^2=r^2\ ;\ \therefore\ (z-a)\overline{(z-a)}=r^2$$

$$\therefore\ (z-a)(\bar{z}-\bar{a})=r^2$$

$$\text{i.e. } z\bar{z}-a\bar{z}-\bar{a}z+a\bar{a}-r^2=0$$

$$\text{i.e. } z\bar{z}+b\bar{z}+\bar{b}z+c=0 \qquad \ldots (1)$$

குறிப்பு : (i) இதில் $c = a\bar{a} - r^2$ = மெய்யெண்ணாகும்.

(ii) இவ் வட்ட மையம் $-b$ என்றும், ஆரமானது $\sqrt{a\bar{a} - c} = \sqrt{b\bar{b} - c}$ என்றும் கவனி.

வேறுமுறை : a, g, f, c மெய்யெண்களானால்

$$a(x^2+y^2)+2gx+2fy+c=0$$

ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கும் என அறிவோம்.

$$\therefore az\bar{z} + g(z+\bar{z}) + f\frac{(z-\bar{z})}{i} + c = 0$$

$$\text{i.e} \quad az\bar{z} + \left(g - \frac{f}{i}\right)\bar{z} + \left(g + \frac{f}{i}\right)z + c = 0$$

$$\text{i.e.} \quad az\bar{z} + (g+if)\bar{z} + (g-if)\,z + c = 0$$

$$\text{i.e.} \quad az\bar{z} + b\bar{z} + \bar{b}z + c = 0$$

இதன் மையம் $-b/a$; ஆரம் $= \sqrt{b\bar{b} - ac}\,/a$

$a = 0$ ஆனால் இது எதைக் குறிக்கும்?

1·15. z_1, z_2, z_3 வழியே செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி?.

$P(z)$ என்ற புள்ளி $A_1(z_1)$, $A_2(z_2)$, $A_3(z_3)$ என்ற புள்ளிகள் வழியே செல்லும் வட்டத்தில் இருக்கட்டும் அப்படியானால் $A_1 A_3 A_2$, $A_1 P A_2$ என்ற கோணங்கள் சமமாக இருக்க வேண்டும், அல்லது, π அளவில் வேறுபட வேண்டும். எனவே,

$$\text{வீச்சம்}\left(\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \div \frac{z - z_1}{z - z_2}\right) = 0 \text{ அல்லது } \pi$$

$$\therefore \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \cdot \frac{z - z_2}{z - z_1} \text{ ஒரு மெய்யெண்}$$

$$\therefore \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \cdot \frac{z - z_2}{z - z_1} = \frac{\bar{z}_3 - \bar{z}_1}{\bar{z}_3 - \bar{z}_2} \cdot \frac{\bar{z} - \bar{z}_2}{\bar{z} - \bar{z}_1}$$

என்பது வட்டத்தின் சமன்பாடாகும்.

குறிப்பு : z_1, z_2, z_3, z_4 ஒரு வட்டத்தில் அமைந்தால்

$$\frac{(z_3 - z_1)}{(z_3 - z_2)} \cdot \frac{(z_4 - z_2)}{(z_4 - z_1)} \text{ ஒரு மெய்யெண்ணாகும்}$$

1·16. ஒரு வட்டத்தின் நேர்மாறான (inverse) புள்ளிகள்

Oஐ மையமாகவும், rஐ ஆரமாகவும் கொண்ட வட்டத்தை எடுத்துக்கொள். A, B என்னும் புள்ளிகள் OAB ஒரு நேர் கோடாக இருக்கும்படியும், $OA \cdot OB = r^2$ என்றும் இருந்தால் A, Bஐ இவ்வட்டத்தைப் பொறுத்து நேர்மாறான புள்ளிகள் என்று சொல்வோம். (Aயும், Bயும் Oவின் ஒரே பக்கத்திலிருக்க வேண்டும் என்பது தெளிவு.)

A, B, O என்பவை முறையே a, b, z என்ற புள்ளிகளானால்

$$|a-z| \quad |b-z| = r^2 \qquad \cdots \text{(i)}$$

$$\text{வீச்சம்}\,(a-z) = \text{வீச்சம்}\,(b-z) \qquad \cdots \text{(ii)}$$
$$= -\text{வீச்சம்}(\overline{b-z})$$

$\therefore$ வீச்சம் $(a-z)+$வீச்சம் $(\overline{b-z})=0$

$\therefore$ வீச்சம் $(a-z)\,(\bar{b}-\bar{z})=0$

$\therefore$ $(a-z)\,(\bar{b}-\bar{z})$ ஒரு மெய் மிகையெண்

$\therefore$ (i)-ல் இருந்து $(a-z)\,(\bar{b}-\bar{z})=r^2$ எனலாம்.

கிளைத் தேற்றம் : $z=0,\ r=1$ ஆனால், அதாவது

$|z|=1$ என்ற வட்டத்தில் $a, \dfrac{1}{\bar{a}}$ ஆகியவை நேர்மாறான புள்ளி களாக இருக்கும். $a\bar{a}=1$.

$|z|=1$ என்ற வட்டத்தில் $z=0$வும் $z=\infty$யும் நேர்மாறான புள்ளிகளாகும். பொதுவாக, $|z-a|=r$ என்ற வட்டத்தில் aவும் ∞யும் நேர்மாறான புள்ளிகளாகும்.

மாதிரிக் கணக்குகள்

மாதிரி 1 : $a, b, c;\ a', b', c'$ என்பவற்றை உச்சிகளாகக் கொண்ட இரு முக்கோணங்கள் நேராக வடிவொத்தவையாக இருந்தால்

$$\begin{vmatrix} a & a' & 1 \\ b & b' & 1 \\ c & c' & 1 \end{vmatrix} = 0$$ என நிரூபி

நிரூபணம்: A, B, C, A', B', C' என்பவை a, b, c, a', b', c' என்ற புள்ளிகளாக இருக்கட்டும்.

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AC}} = \frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{A'C'}}$$

$$\therefore \frac{b-a}{c-a} = \frac{b'-a'}{c'-a'} \qquad \dots \quad (2)$$

$$\therefore \begin{vmatrix} a & a' & 1 \\ b & b' & 1 \\ c & c' & 1 \end{vmatrix} = 0$$

வேறுமுறை : $\frac{b-a}{c-a} = \frac{AB}{AC} \cdot e^{-Ai}$

$$\frac{b'-a'}{c'-a'} = \frac{A'B'}{A'C'} \cdot e^{-A'i}$$

ஆனால் $A=A'$; $AB/AC = A'B'/A'C'$

$\therefore \frac{b-a}{c-a} = \frac{b'-a'}{c'-a'}$ (மற்றவை முன் போல்)

மாதிரி 2 : a, b, c ஐ உச்சிப்புள்ளிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் (i) மையக் கோட்டுச் சந்தி, (ii) சுற்று வட்ட மையம், (iii) செங்கோட்டு மையம் ஆகியவற்றைக் கண்டுபிடி.

(i) A, B, C என்பவை a, b, c என்ற புள்ளிகளாக இருக்கட்டும். $a=x_1+iy_1$; $b=x_2+iy_2$; $c=x_3+iy_3$ ஆக இருந்தால், மையக்கோட்டுச் சந்தியான $G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ என அறிவோம். இந்த இணை எண்ணைத்தான் $(a+b+c)/3$ குறிப்பிடும்.

$$\therefore G=(a+b+c)/3$$

(ii) $S(z)$ என்பது இதன் சுற்று வட்ட மையமாக இருக்கட்டும். அப்படியானால்,

$$|z-a|^2 = |z-b|^2 = |z-c|^2$$

$$\therefore (z-a)(\bar{z}-\bar{a}) = (z-b)(\bar{z}-\bar{b})$$

i.e. $\bar{z}\{(z-a)-(z-b)\} = \bar{a}(z-a)-\bar{b}(z-b)$

i.e. $\bar{z}(b-a) = z(\bar{a}-\bar{b}) - (a\bar{a}-b\bar{b})$ ... (1)

இதே விதமாக, $\bar{z}(c-b) = z(\bar{b}-\bar{c}) - (b\bar{b}-c\bar{c})$ ... (2)

$$\therefore \frac{b-a}{c-b} = \frac{z(\bar{a}-\bar{b})-(a\bar{a}-b\bar{b})}{z(\bar{b}-\bar{c})-(b\bar{b}-c\bar{c})}$$

i.e. $z(b-a)(\bar{b}-\bar{c}) - (b-a)(b\bar{b}-c\bar{c})$

$= z(c-b)(\bar{a}-\bar{b}) - (c-b)(a\bar{a}-b\bar{b})$

i.e. $z[(b-a)(\bar{b}-\bar{c}) + (b-c)(\bar{a}-\bar{b})]$

$= (b-a)(b\bar{b}-c\bar{c}) + (b-c)(a\bar{a}-b\bar{b})$

i.e. $z\,\Sigma\,\bar{a}(b-c) = \Sigma\, a\bar{a}(b-c)$

$\therefore z = \dfrac{\Sigma\, a\bar{a}(b-c)}{\Sigma\,\bar{a}(b-c)}$ என்பது சுற்றுவட்ட மையம்.

(iii) $O(z)$ என்பது செங்கோட்டு மையமாக இருக்கட்டும்

$\therefore AO \perp BC$

$\therefore \dfrac{z-a}{b-c}$ ன் வீச்சம் $= \pm \pi/2$

$$\therefore R\left(\frac{z-a}{b-c}\right) = 0$$

$$\therefore \frac{z-a}{b-c} + \frac{\bar{z}-\bar{a}}{\bar{b}-\bar{c}} = 0$$

$\therefore \bar{z} = \bar{a} - \dfrac{z-a}{b-c}(\bar{b}-\bar{c})$ ... (1)

இதேவிதமாக $\bar{z} = \bar{b} - \dfrac{z-b}{c-a}(\bar{c}-\bar{a})$ ... (2)

$$\therefore \bar{a} - \frac{z-a}{b-c}(\bar{b}-\bar{c}) = \bar{b} - \frac{z-b}{c-a}(\bar{c}-\bar{a})$$

$$\therefore \bar{a}-\bar{b} = \frac{z-a}{b-c}(\bar{b}-\bar{c}) - \frac{z-b}{c-a}(\bar{c}-\bar{a})$$

i.e. $(\bar{a}-\bar{b})(b-c)(c-a)$

$= (z-a)(\bar{b}-\bar{c})(c-a) - (z-b)(\bar{c}-\bar{a})(b-c)$

$$\therefore z = \frac{\Sigma a^2(\bar{b}-\bar{c}) + \Sigma c\bar{a}(b-c)}{\Sigma(a\bar{b}-\bar{a}b)}$$

மாதிரி 3: z_1, z_2, z_3 ஐ உச்சிப் புள்ளிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பு

$$\sum \left\{ \frac{|z_1|^2 \ (z_2 - z_3)}{4iz_1} \right\} \text{ என நிரூபி.}$$

$z_r = x_r + iy_r$, $r = 1, 2, 3$ எனக் கொள்க. இம்முக்கோணத்தின் பரப்பு

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2i} \begin{vmatrix} x_1 & iy_1 & 1 \\ x_2 & iy_2 & 1 \\ x_3 & iy_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2i} \begin{vmatrix} x_1 & x_1+iy_1 & 1 \\ x_2 & x_2+iy_2 & 1 \\ x_3 & x_3+iy_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2i} \begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2i} \Sigma \, x_1 \, (z_2 - z_3)$$

$$= \frac{1}{4i} \Sigma \, (z_1 + \bar{z}_1)(z_2 - z_3)$$

$$= \frac{1}{4i} \Sigma \bar{z}_1 \, (z_2 - z_3), \ \because \Sigma \, z_1 \, (z_2 - z_3) = 0$$

$$= \frac{1}{4i} \sum \frac{z_1 \bar{z}_1 \, (z_2 - z_3)}{z_1}$$

$$= \sum \left\{ \frac{|z_1|^2 (z_2 - z_3)}{4iz_1} \right\}$$

மாதிரி 4 : ஆர்கன் தளத்தில் பின்வரும் அரங்கங்களைக் கண்டுபிடி:-

(i) $|z - i| = 5$

(ii) $|z - i| = |z + 1|$

(iii) $|z - 3| + |z + 3| = 10$

(iv) வீச்சம் $\dfrac{z-1}{z+1} = \dfrac{\pi}{4}$

(v) $\left| \dfrac{z-1}{z+1} \right| \geq 2$

(vi) $|z^2 - z| < |$

(vii) $\pi/4 \leq$ வீச்சம் $z \leq 3\pi/4$

(i) இது i ஐ மையமாகவும், 5ஐ ஆரமாகவும் உடைய வட்டம்.

(ii) இது (0, 1), (−1, 0) என்ற புள்ளிகளின் நடுக்குத்துக் கோடாகும். ஏனெனில் zக்கும் iக்கும் உள்ள தூரம் $=z$க்கும் (−1) க்கும் உள்ள தூரம்.

(iii) இது $S(3,0)$, $S'(-3, 0)$ ஐக் குவியப் புள்ளிகளாக உடைய நீள்வட்டமாகும். ஏனெனில் $SP+S'P=10$. ∴ பேரச்சின் நீளம் 10 ஆகும்.

வேறுமுறை

$$\sqrt{(x-3)^2+y^2}+\sqrt{(x+3)^2+y^2}=10$$

இதைச் சுருக்கினால் $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ என்ற நீள்வட்டம் கிடைக்கும்.

(iv) $$\frac{z-1}{z+1}=\frac{x+iy-1}{x+iy+1}$$

$$=\frac{(x-1+iy)(x+1-iy)}{(x+1)^2+y^2}$$

$$=\frac{x^2-1+y^2+2iy}{(x+1)^2+y^2}$$

∴ வீச்சம் $(z-1)/(z+1)=\tan^{-1} 2y/(x^2+y^2-1)$

$\therefore \tan^{-1} 2y/(x^2+y^2-1)=\pi/4$

$$\frac{2y}{x^2+y^2-1}=\tan(\pi/4)=1$$

$\therefore 2y=x^2+y^2-1$

அல்லது $x^2+y^2-2y-1=0$ என்ற வட்டமாகும்.

(v) $$\left|\frac{z-1}{z+1}\right| \geq 2$$

$\therefore |z-1|^2 \geq 4|z+1|^2$

$\therefore (z-1)(\bar{z}-1) \geq 4(z+1)(\bar{z}+1)$

$\therefore z\bar{z}-z-\bar{z}+1 \geq 4z\bar{z}+4z+4\bar{z}+4$

$\therefore 0 \geq 3z\bar{z}+5z+5\bar{z}+3$

$\therefore 0 \geq 3(x^2+y^2)+5.2x+3$

இது $3(x^2+y^2)+10x+3=0$ என்ற வட்டத்தின் உட்புறத்தைக் குறிக்கும்.

(vi) $|z^2 - z| < 1$

$\therefore \; |r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) - r(\cos\theta + i\sin\theta| < 1$

$\therefore \; (r^2\cos 2\theta - r\cos\theta)^2 + (r^2\sin 2\theta - r\sin\theta)^2 < 1$

$\therefore \; r^4 - 2r^3(\cos 2\theta\cos\theta + \sin 2\theta\sin\theta) + r^2 < 1$

$\therefore \; r^4 - 2r^3\cos\theta + r^2 - 1 < 0$

ஆகவே இது $r^4 - 2r^3\cos\theta + r^2 - 1 = 0$ என்ற வளைகோட்டின் உட்புறத்தைக் குறிக்கும்.

(vii) இது $\theta = \pi/4$, $\theta = 3\pi/4$ என்ற கோடுகளுக்கிடையே உள்ள பகுதி என்பது தெளிவு.

மாதிரி 5: z_1, z_2, z_3, z_4 என்ற புள்ளிகள் $z_1z_2 + z_3z_4 = 0$; $z_1 + z_2 = 0$ என்பதற்கிணங்க இருந்தால் இவை ஒரு வட்டத்தில் அமையும் என நிரூபி.

1·15ல் உள்ளபடி

$\dfrac{(z_3 - z_1)(z_4 - z_2)}{(z_3 - z_2)(z_4 - z_1)}$ ஒரு மெய்யெண் என நிரூபித்தால் போதுமானது. இப்பொழுது,

$$\frac{(z_3 - z_1)(z_4 - z_2)}{(z_3 - z_2)(z_4 - z_1)}$$

$$= \frac{z_3z_4 + z_1z_2 - z_1z_4 - z_2z_3}{z_3z_4 + z_1z_2 - z_2z_4 - z_1z_3}$$

$$= \frac{z_1z_4 + z_2z_3}{z_2z_4 + z_1z_3}, \quad \because \; z_1z_2 + z_3z_4 = 0$$

$$= \frac{z_1z_4 - z_1z_3}{-z_1z_4 + z_1z_3}, \quad \because \; z_2 = -z_1$$

$= -1$ என்பது மெய்யெண்ணாகும்.

$\therefore \; z_1, z_2, z_3, z_4$ ஒரு வட்டத்தில் இருக்கும்.

மாதிரி 6: (i) z_1, z_2, z_3 ஐ உச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணம் சமபக்க $\triangle$ ஆனால் $\Sigma z_1^2 = \Sigma z_2 z_3$ என நிரூபி.

இச்சமபக்க $\triangle$ல் $AB = BC = CA = a$ ஆக இருக்கட்டும். (a என்பது மெய்யெண்). AB ஆனது x-அச்சுடன் உண்டாக்கும்

கோணம் θ ஆனால், AC ஆனது x-அச்சுடன் உண்டாக்கும் கோணம் $\theta+\pi/3$ ஆகும்.

$$\therefore \frac{z_3-z_1}{z_2-z_1} = \frac{a\, e^{i(\theta+\pi/3)}}{a\, e^{i\theta}} = e^{i\pi/3}$$

இதே விதமாக, $\dfrac{z_1-z_2}{z_3-z_2} = e^{i\pi/3} = \dfrac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$

$$\therefore (z_1-z_2)(z_2-z_1) = (z_3-z_1)(z_3-z_2)$$

இதைச் சுருக்க, $\Sigma z_1^2 = \Sigma z_1 z_2$ ஆகும்.

(ii) $(z_1-z_2)(z_1'-z_2') = (z_2-z_3)(z_2'-z_3')$

$= (z_3-z_1)(z_3'-z_1')$

ஆனால், $z_1, z_2, z_3;\ z_1', z_2', z_3'$ என்பவற்றை உச்சிகளாகக் கொண்ட Δகள் சமபக்க முக்கோணங்கள் என நிரூபி.

கொடுக்கப்பட்டதிலிருந்து,

$$\frac{z_1-z_2}{z_2'-z_3'} = \frac{z_2-z_3}{z_1'-z_2'} = \frac{z_1-z_3}{z_1'-z_3'}$$

(பகுதிகளையும், விகுதிகளையும் கூட்ட)

$$\text{அதாவது } \frac{z_1-z_2}{z_2'-z_3'} = \frac{z_1-z_3}{z_1'-z_3'} \quad \ldots (1)$$

ஆனால் $(z_2-z_3)(z_2'-z_3') = (z_3-z_1)(z_3'-z_1')$ ... (2)

(1)×(2) $\quad (z_1-z_2)(z_2-z_3) = (z_1-z_3)^2$

அதாவது $\Sigma z_1^2 = \Sigma z_1 z_2$. $\therefore$ (i)ல் இருந்து $z_1\, z_2\, z_3$ ஒரு சமபக்க முக்கோணம். இதே விதமாக, $z_1'\, z_2'\, z_3'$ உம் ஒரு சமபக்க முக்கோணம்.

பயிற்சி 1:

1. பின்வருவனவற்றை வரை கணித முறைப்படி நிறுவுக:

(i) $(1+i)+(1-i) = 2$

(ii) $(1+i)-(1-i) = 2i$

(iii) $(1+i)(1-i) = 2$

(iv) $(1+i)/(1-i) = i$

2. பின்வருவனவற்றின் மட்டுவையும், வீச்சத்தையும் கண்டுபிடி.

(i) $\frac{2+3i}{1-i}$ [விடை $\sqrt{13/2}$, $\pi-\tan^{-1}5$.

(ii) $\frac{(2-i)(1+i)}{(1-i)}$ விடை : $\sqrt{5}$, $\tan^{-1}2$

3. $5-12i$-ன் வர்க்கமூலம் $\pm(3-2i)$ எனக் காண்பி.

4. $\frac{2-i}{(1-2i)^2}$ ன் துணைக் கலப்பெண் $-\frac{(2+11i)}{25}$ எனக் காண்பி.

5. $\frac{1}{1+\cos\theta+i\sin\theta}$ ன் துணைக் கலப்பெண் $\frac{\sin\theta+i(1-\cos\theta)}{\sin\theta}$ எனக் காண்பி.

6. $\frac{3}{2+\cos\theta+i\sin\theta}$ ன் மட்டு, வீச்சம், துணைக்கலப்பெண் ஆகியவை $\frac{3}{\sqrt{5+4\cos\theta}}$; $-\tan^{-1}\frac{\sin\theta}{2+\cos\theta}$; $\frac{3[2+\cos\theta+i\sin\theta]}{5+4\cos\theta}$ என நிரூபி.

7. z என்பது ஒரு கலப்பெண். $ze^{i\theta}$ என்ன என்பதை வரைபடம் மூலம் விளக்குக.

8. $z^4=1$ ஆனால் z-ன் எல்லா மதிப்புகளையும் கண்டுபிடித்து ஆர்கன் படத்தில் காண்பி.

9. $|z_1| = |z_2|$ ஆகவும், z_1-ன் வீச்சம் + z_2-ன் வீச்சம் $= 0$ ஆகவும் இருந்தால் z_1, z_2 என்பன துணைக்கலப்பெண்கள் என நிரூபி.

10. α, β என்பன இரு நிலைக் (மாறிலா) கலப்பெண்கள். t ஒரு மெய்யான மாறியானுல் $z=\alpha+t(\beta-\alpha)$ என்பதன் நியமபாதை ஒரு நேர்கோடு என நிறுவுக.

11. $\left|\frac{z-1}{z-i}\right| = 1$ எனில் z-ன் நியமபாதை ஆதியின் மூலம் செல்லும் ஒரு நேர்கோடு என நிறுவுக.

12. பின்வரும் சமன்பாடுகள் எவற்றைக் குறிக்கின்றன?

(i) $|z+2+3i| = 4$

(ii) $2|z-2i| = |z-2|$

(iii) $|z+4| + |z-4| = 12$

(iv) $|z+3| - |z-3| = 5$

(v) $\left(\frac{2z+i}{z-i}\right)$ ன் வீச்சம் $= \pi/6$

(vi) $\left(\frac{z+2i}{2z+1}\right)$ ன் வீச்சம் $= \pi/3$

விடை : (i) வட்டம். மையம் $(-2-3i)$. ஆரம் 4.

(ii) வட்டம். மையம் $\left(-\frac{2}{3}+\frac{8i}{3}\right)$. ஆரம் $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

(iii) நீள் வட்டம். குவியங்கள் $(4, 0)$, $(-4, 0)$. பேரச்சு 12.

(iv) அதிபரவளைவு. குவியங்கள் $(3, 0)$ $(-3, 0)$. பேரச்சு 5.

(v) $2(x^2+y^2) - 3\sqrt{3}x - y - 1 = 0$

(vi) $\sqrt{3}(x^2+2y^2+x+4y) = 4x+y+2$

13. $\frac{z-1}{z+1}$ ன் வீச்சம் $\pi/3$ ஆனால் $x^2+y^2 - \frac{2y}{\sqrt{3}} - 1 = 0$ என நிறுவுக.

14. $\left|\frac{z-i}{z+i}\right| \geq 2$ என்பது $3(x^2+y^2)+10y+3 = 0$ என்ற வட்டத்தின் உட்புறத்தையும், வரம்பையும் குறிப்பிடும் எனக் காண்பி.

15. $|z^2-1| < 1$ என்பது $r^2 = 2\cos 2\theta$ என்ற வளை வரையின் உட்புறத்தைக் குறிக்கும் என நிரூபி.

16. $|z^2-z| < 1$ என்பது $r^4 - 2r^3\cos\theta + r^2 - 1 = 0$ என்ற வளை வரையின் உட்புறத்தைக் குறிக்கும் என நிரூபி.

17. $\left|\frac{z-1}{z+1}\right|$ = மாறிலி; $\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$ ன் வீச்சம் = மாறிலி என்பன செங்குத்தாக வெட்டும் இரு வட்டங்களைக் குறிக்கின்றன என நிரூபி.

18. a, b என்பன கொடுக்கப்பட்ட இரு கலப்பெண்கள். $a\, z_1\, b\, z_2$ ஒரு சதுரமாக இருக்கும்படி z_1, z_2 ஐக் கண்டு பிடி. [விடை. $\frac{1}{2}[(a+b) \mp (a-b)\, i]$

19. $(z+1)^5 + z^5 = 0$ என்பதன் மூலங்கள் எல்லாம் கற்பனை அச்சுக்கு இணையான கோட்டில் அமையும் என நிரூபி.

(விடை $x = -\frac{1}{2}$.

20. $z_1\, z_2\, z_3$ என்ற இருசமபக்க $\triangle$-ல் z_2 என்னும் புள்ளியில் நேர்கோணம் இருந்தால்

$$z_1^2 + 2z_2^2 + z_3^2 = 2z_2\,(z_1 + z_3)$$ என நிரூபி.

21. $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ ஆகவும், $z_1+z_2+z_3 = 0$ ஆகவும் இருந்தால் $z_1\, z_2\, z_3$ ஒரு சமபக்க முக்கோணம் என நிரூபி.

22. $\triangle = z_1\, z_2\, z_3$ என்ற முக்கோணத்தின் பரப்பானுல்

$$\triangle = \frac{1}{2}\,|z_2 - z_3|^2\, I\left\{\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}\right\}$$

$$= \frac{1}{4i}\sum \frac{(z_2 - z_3)\,|z_1|^2}{z_1}$$ என நிரூபி.

23. z_1, z_2 என்னும் புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$2z\bar{z} - (\bar{z}_1 + \bar{z}_2)\, z - (z_1 + z_2)\, \bar{z} + (z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1) = 0,$$ என நிரூபி.

24. t என்பது ஒரு மெய் மாறியானுல்

(i) $z = a\cos t + b\sin t$ என்பது ஒரு நீள் வட்டம் என்றும்

(ii) $z = at + \dfrac{b}{t}$ என்பது ஒரு அதிபர வளைவு என்றும் நிரூபி.

25. t என்பது ஒரு மெய்மாறி. $ad - bc \neq 0$

$\dfrac{c}{d}$ என்பது மெய்யெண் (கற்பனை எண்) ஆனுல்

$$z = \frac{a+bt}{c+dt}$$ என்பது ஒரு நேர்கோட்டை (வட்டத்தை)க் குறிக்கும் என நிரூபி.

26. $z^2+az+\beta=0$ என்பதன் மூலகங்கள் இருதுணைக் கலப் பெண்கள் ஆனால் a, β மெய்யெண்கள் எனவும், $a^2<4\beta$ எனவும் நிறுவுக.

27. A_1, A_2, A_3 என்ற புள்ளிகளைக் குறிக்கும் z_1, z_2, z_3 என்பவை $x^3+3ax^2+3bx+c=0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங் களானால் $\triangle A_1A_2A_3$-ன் மையக்கோட்டுச் சந்தி—a என நிரூபி. $A_1A_2A_3$ ஒரு சமபக்க $\triangle$ ஆயின் $a^2=b$ என நிரூபி.

28. z_1, z_2 என்பன $az^2+2\beta z+\gamma=0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களானால்

$$|z_1|+|z_2|=\frac{1}{|a|}\cdot\{|-\beta+\sqrt{a\gamma}|+|-\beta-\sqrt{a\gamma}|\}$$

என நிறுவுக.

29. ABC என்ற $\triangle$-ன் பக்கங்களில் BCX, CAY, ABZ என்ற வடிவொத்த $\triangle$-கள் வரையப்பட்டுள்ளன. ABC, XYZ என்ற முக்கோணங்களின் மையக்கோட்டுச் சந்திகள் ஒன்றுபடுகின்றன என நிரூபி.

30. A, B, C, D என்பவை ஒரே தளத்திலுள்ள 4 புள்ளி களானால்

$AD.BC \leq BD.CA+CD.AB$ என நிரூபி.

31. $R(a)$ = மிகையெண் ஆனால் $\left|\frac{z-a}{z-\bar{a}}\right|<1$

என்பது கற்பனை அச்சுக்கு வலப்புறமுள்ள பகுதியைக் குறிக்கும் என நிரூபி.

32. ρ என்பது மெய்யெண். A என்பது $z=\rho$. B என்பது $z=2i\rho$. $P=(a+ib)$ என்னும் புள்ளி AB-யில் நகர்கிறது.

$Q=-\dfrac{\rho^2}{a+ib}$ என்பது ஒரு வட்டத்தில் செல்லும் என நிரூபி.

(குறிப்பு: C என்பது $z=-\rho$ ஆனால், OAP, OQC என்ற $\triangle$-கள் வடிவொத்தவை.

33. கலப்பெண்களின் கணம் ஒரு களம் என நிரூபி.

z_1, z_2, z_3 என்பவை S என்ற கலப்பெண்களின் கணத்தின் உறுப்புகளானால்

(i) $z_1 + z_2 \in S$; $z_1 z_2 \in S$.

$\therefore$ S ஒரு அடைத்த கணம்

(ii) $z_1+z_2=z_2+z_1$; $z_1z_2=z_2z_1$.

கூட்டல், பெருக்கல் ஆகியவற்றின் பரிமாற்று விதிகள் பொருந்தும்.

(iii) $z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$

$z_1(z_2z_3)=(z_1z_2)z_3$

கூட்டல், பெருக்கல் ஆகியவற்றின் தொடர்பு விதிகள் பொருந்தும்.

(iv) $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$

பங்கீட்டு விதியை நிரூபித்துக் காட்டுவோம்.

$$z_1(z_2+z_3)=(x_1, y_1)[(x_2, y_2)+(x_3, y_3)]$$
$$=(x_1, y_1)[x_2+x_3, y_2+y_3]$$
$$=[x_1(x_2+x_3)-y_1(y_2+y_3), x_1(y_2+y_3)+y_1(x_2+x_3)]$$
$$=[x_1x_2-y_1y_2+x_1x_3-y_1y_3, x_1y_2+x_2y_1+x_1y_3+x_3y_1]$$
$$=[(x_1x_2-y_1y_2, x_1y_2+x_2y_1)+(x_1x_3-y_1y_3, x_1y_3+x_3y_1)]$$
$$=z_1z_2+z_1z_3$$

(v) $z_1+0=0+z_1=z_1$

இதில் 0 என்பது (0, 0) அல்லது $0+i0$ என்பதை நினைவிற் கொள்க. 0 என்பது கூட்டலின் மாற்று உறுப்பு (identity element) ஆகும்.

(vi) $1.z_1=z_1.1=z_1$

இதில் 1 என்பது (1, 0) அல்லது $1+i0$ ஆகும். 1 என்பது பெருக்கலின் மாற்று உறுப்பாகும்.

(vii) z என்ற ஏதேனும் ஒரு கலப்பெண்ணை எடுத்துக் கொண்டால் $z+z'=z'+z=0$ என இருக்கும்படி z' என்ற கலப்பெண்ணைக் கண்டுபிடிக்க இயலும். $z'=-z$ என்பது தெளிவு. z' ஐ z-ன் கூட்டலில் நேர்மாறான உறுப்பு (additive inverse) என்று சொல்லுகிறோம்.

(viii) z என்பது (பூச்சியமல்லாத) ஏதேனும் ஒரு கலப்பெண்ணாக இருந்தால்,

$zz'=z'z=1$ என இருக்கும்படி z' என்ற கலப்பெண்ணைக் கண்டுபிடிக்க இயலும். $z'=\frac{1}{z}$ என்பது தெளிவு. z' ஐ z-ன் (பெருக்கலில்) நேர்மாறான உறுப்பு (multiplicative inverse) என்று சொல்லுகிறோம்.

இவைகளிலிருந்து S ஒரு களம் எனத் தெரிகிறது.

2. பகு முறைச் சார்புகள்

2.1. சில வரையறைகள்

கலப்பெண்களிலும் ஒரே மதிப்புடைய எண்களை மாறிலி என்றும், வெவ்வேறு மதிப்புகள் பெறுவனவற்றை மாறிகள் என்றும் சொல்வது பொருந்தும்.

1. சுற்றுப்புறம்: ஆர்கன் தளத்தில் S என்ற கணத்தில் z_0 ஒரு புள்ளியானால் $|z-z_0| < \varepsilon$ (ε ஏதாவது ஒரு சிறிய மிகை மெய்யெண்) என்பதற்கிணங்க இருக்கும் புள்ளிகளின் கணத்தை z_0ன் சுற்றுப்புறம் என்போம். இச்சுற்றுப் புறத்தின் ஆரம் ε ஆகும்.

அதாவது, $N(z_0) = \{z : |z-z_0| < \varepsilon\}$

இச்சுற்றுப் புறத்தில் z_0 ஐ மட்டும் விட்டு விட்டால், இக் கணத்தை z_0ன் தன்னை விடுத்த சுற்றுப்புறம் என்போம்.

$$\text{deleted } N(z_0) = \{z : |z-z_0| < \varepsilon\} - \{z_0\}$$

இனி, முடிவிலிப்புள்ளியின் சுற்றுப் புறத்தை, K என்பது ஒரு மிகையெண் ஆனால், $|z| > K$ என்பதற்கிணங்க இருக்கும் புள்ளிகளின் கணம் எனலாம்.

$$N(\infty) = \{z : |z| > K\} \ldots K > O.$$

2. எல்லைப்புள்ளி: S என்ற கணத்தில், z_0 என்னும் புள்ளியின் ஒவ்வொரு சுற்றுப் புறமும் z_0 ஐத்தவிர S என்னும் கணத்தைச் சேர்ந்த வேறு சில புள்ளிகளைக் கொண்டிருந்தால் z_0 ஐ ஒரு எல்லைப் புள்ளி என வரையறை செய்வோம். இதிலிருந்து ஒவ்வொரு z_0 ன் சுற்றுப் புறத்திலும் Sஐச் சேர்ந்த எண்ணற்ற புள்ளிகள் உண்டு என்பது தெளிவு.

z_0 ஒரு எல்லைப் புள்ளி $\longleftrightarrow \exists z \ni z \in N(z_0) - \{z_0\} \ldots \forall N(z_0)$.

எடுத்துக் காட்டாக, $|z| = c$ என்னும் வட்டத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியும் $S = \{z : |z| < c\}$ என்ற கணத்தின் எல்லைப் புள்ளியாகும். இந்த எல்லைப் புள்ளிகள் S என்ற கணத்தைச்

சேர்ந்தவை அல்ல. மேலும், $|z| < c$ என்றவாறு உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியும் ஒரு எல்லைப் புள்ளியாகும். மற்றோர் எடுத்துக் காட்டாக, $\left\{ \frac{2+ni}{n+2} : n=1, 2, 3, \ldots \right\}$ என்ற கணத்தை எடுத்துக் கொண்டால் i என்பது இதன் எல்லைப்புள்ளி ஆகும். இது நாம் எடுத்துக் கொண்ட கணத்தைச் சேர்ந்ததல்ல.

3. உட்புற, வெளிப்புற, வரம்புப்புள்ளிகள்: S என்ற கணத்தில் உள்ள z_0 என்ற புள்ளியின் ஏதேனும் ஒரு சுற்றுப்புறத்தின் எல்லாப் புள்ளிகளும் Sல் அமைந்தால் z_0 ஒரு உட்புறப் புள்ளி ஆகும். ஒவ்வொரு உட்புறப் புள்ளியும் எல்லைப் புள்ளியாக இருக்க வேண்டும் என்பதை நோக்குக. ஆனால் எல்லா எல்லைப் புள்ளிகளும் உட்புறப் புள்ளிகளாக இருக்க வேண்டியதில்லை. ஏன்?

z_0ன் ஒவ்வொரு சுற்றுப்புறத்திலும் Sல் இல்லாத புள்ளிகளும், Sல் உள்ள புள்ளிகளும் இருந்தால் z_0ஐ வரம்புப் புள்ளி (boundary point) என்று சொல்வோம். எனவே, Sல் இல்லாத எல்லா எல்லைப் புள்ளிகளும் வரம்புப் புள்ளிகளாக இருக்க வேண்டும் என்பது தெளிவு. (ஏன்?) எடுத்துக் காட்டாக, $z=0$ உம் $|z|=r$ என்ற வட்டத்தில் உள்ள எல்லாப்புள்ளிகளும் $S=\{z: 0<|z|<r\}$ என்ற கணத்தின் வரம்புப் புள்ளிகளாகும்.

கடைசியாக, உட்புறப்புள்ளியாகவோ, வரம்புப் புள்ளியாகவோ இல்லாத புள்ளிகள் வெளிப்புறப்புள்ளிகள் ஆகும்.

முக்கிய குறிப்பு: limit point ஐ எல்லைப் புள்ளி எனவும்; boundary point ஐ வரம்புப் புள்ளி எனவும் நாம் மொழிபெயர்த்திருக்கிறோம். சிலர் limit point ஐயே வரம்புப் புள்ளி என மொழி பெயர்க்கலாம். இக் குழப்பத்தை தவிர்க்கவும்.

4. திறந்த, வரம்புள்ள, தொடுத்த கணங்கள்: உட்புறப் புள்ளிகளை மட்டுமே கொண்டுள்ள கணம் திறந்தகணம் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $\{z: |z| < 5\}$ ஒரு திறந்த கணம்.

ஒரு கணத்தின் எல்லா எல்லைப் புள்ளிகளும் அதிலேயே இருந்தால், நாம் அதனை அடைத்த கணம் என்போம். எடுத்துக் காட்டாக, $\{z: |z| \leq 5\}$ ஒரு அடைத்த கணம்.

வரம்புள்ள கணம்: Sல் உள்ள z என்ற எந்தப் புள்ளியை எடுத்துக் கொண்டாலும் $|z| < k$ என்பதற்கிணங்க k என்ற

மிகையெண் இருந்தால் S ஒரு வரம்புள்ள கணமாகும். இல்லாவிடில் S ஐ வரம்பில்லாகணம் என்று சொல்வோம்.

தொடுத்த கணம்: ஒரு கணத்திலுள்ள ஏதேனும் இரு புள்ளிகளை, எண்ணளவில் அடங்கக்கூடிய (finite number) நேர்கோடுகளாலான சங்கிலித் தொடரால் இணைக்கக் கூடியதாயிருந்தால் அதைத் தொடுத்த கணம் என்று சொல்வோம். எடுத்துக் காட்டாக, $S = \{ z : |z| < 1 \}$ என்பது ஒரு தொடுத்த கணம். ஆனால், $S = \{ z : |z| < 1$ அல்லது $|z| > 2 \}$ என்பது தொடுத்த கணம் அல்ல.

5. திறந்த அரங்கம்: ஒரு திறந்த தொடுத்த கணத்தைத் திறந்த அரங்கம் என வரையறை செய்வோம். ஒரு திறந்த அரங்கத்தின் வரம்புப்புள்ளிகளையும் அதனுடன் சேர்த்துக் கொண்டால், அது ஒரு அடைத்த அரங்கம் ஆகும்.

2·2. ஜார்டன் வில்

$a \leq t \leq b$ ஆக இருக்கும் போது, $x = \phi(t)$; $y = \psi(t)$ என்பன மெய்யான தொடர்புடைச் சார்புகளாக இருக்கட்டும். அப்படியானல், (x, y) என்ற புள்ளிகளின் கணம் ஒரு தொடர்ச்சியான வில்லாக இருக்கும். இவ்வரையறை மூலம் (a, b) என்ற இடைவெளியில் t யின் மதிப்பு மாறுவதற்கு ஏற்றவாறு, (x, y) என்ற புள்ளியின் இருப்பிடம் வில்லில் மாறும் என்பது தெளிவு. t யின் இரு வேறு மதிப்புகளுக்கு (x, y) என்ற ஒரே புள்ளி இசையாதிருந்தால் இதனை ஜார்டன் வில் என்போம்.

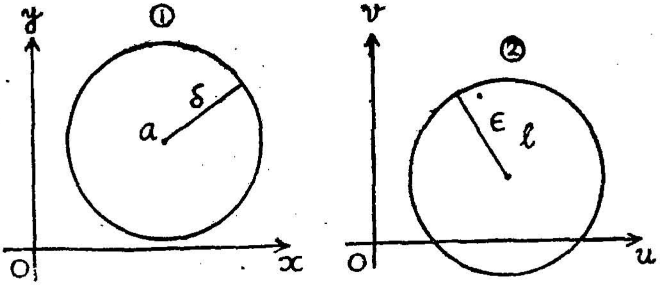
மேலும், $\phi(a) = \phi(b)$ ஆகவும், $\psi(a) = \psi(b)$ ஆகவும் இருந்தால், நாம் இதை எளிய அடைத்த வளைவரை அல்லது ஜார்டன் வளைவரை என்று சொல்வோம். எடுத்துக்காட்டாக $x = \cos t$, $y = \sin t \ldots 0 \leq t \leq 2\pi$ ஒரு ஜார்டன் வளைவரை ஆகும். ஆனல் $x = t^2$, $y = 2t \ldots 0 \leq t \leq 2$ என்பது ஒரு ஜார்டன் வில் ஆகும்.

ஜார்டன் வளைவரை தேற்றம்: "ஒரு எளிய அடைக்கப்பட்ட ஜார்டன் வளைவரையானது ஆர்கன் தளத்தை இரு திறந்த அரங்கங்களாகப் பிரித்து, இவ்விரு அரங்கங்களுக்கும் பொதுவான வரம்பாக இருக்கும்." இவ் வரங்கங்களில் வரம்புடைய (bounded) அரங்கத்தை உட்புற அரங்கம் என்றும், அடுத்ததை வெளிப்புற அரங்கம் என்றும் சொல்வோம். உதாரணமாக. $|z| = r$ என்ற ஜார்டன் வளைவரை $|z| < r$ என்ற உட்புற அரங்கத்தையும் $|z| > r$ என்ற வெளிப்புற அரங்கத்தையும்

உண்டாக்குகிறது. $|z| = r$ இவற்றிற்குப் பொதுவான வரம்பு என்பது தெளிவு.

2·3. சார்பலனின் எல்லை :

எவ்வளவு சிறிய மிகை எண் ε கொடுக்கப்பட்டாலும் $0 < |z - a| < \delta$ ஆக இருக்கும்போது $|f(z) - l| < \varepsilon$ ஆக இருக்கும்படி ஒரு δஐக் கண்டுபிடிக்க முடியுமானால் $\lim_{z \to a} f(z) = l$ என வரையறை செய்வோம்.



படம்—5.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள εக்கு ஏற்றவாறு δ ஐ $\delta = \phi(\varepsilon)$ எனக் கண்டு பிடித்தால் போதுமானது. $\phi(\varepsilon)$ ஒரு குறிப்பிட்ட சார்பாக இருக்க வேண்டியதில்லை. ஏனெனில் $|z - a| < \frac{\phi(\varepsilon)}{2}$ ஆனால், அது $|z-a| < \phi(\varepsilon)$ ஆகவும் இருக்கும். $\therefore \phi(\varepsilon)$க்குப் பதிலாக $\phi(\varepsilon)/2$ஐயும் எடுத்துக் கொள்ளலாம் அல்லவா?

வரைபட விளக்கம்: $|z - a| < \delta$ ஆனால், அதாவது z ஆனது முதல் வட்டத்தினுள் எங்கேயிருந்தாலும் $f(z) = w$ ஆனது $|w - l| = \varepsilon$ என்ற 2வது வட்டத்தின் உட்புறம் இருக்க வேண்டும். இதனால் z ஆனது முதல் வட்டத்தில் வெவ்வேறு இடங்களில் இருக்க, w ஆனது 2 வது வட்டத்தின் வெவ்வேறு இடங்களை ஆக்கிரமிக்கும் என்று பொருள் கொள்ளுதல் தவறு. எடுத்துக்காட்டாக, $f(z)$ ஆனது l என்ற மாறிலியானால் zன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் $f(z)$ ஆனது 2வது வட்டத்தின் மையப் புள்ளியிலேயே இருக்கும். ஆனால் z ஆனது முதல் வட்டத்தின் எல்லாப் பகுதிகளிலும் இருந்தாலும் $|w-l| < \varepsilon$ என்ற சமனிலி பொருந்துவதாக இருக்க வேண்டும். மேலும், z ஆனது a ஐ ஒரு குறிப்பிட்ட திசையில்தான் அணுக வேண்டும் என்ற கட்டுப்பாடு கிடையாது.

2.4 தேற்றம் : $\lim_{z\to a} f(z)$ (எல்லை) இருந்தால், ஒரே ஒரு எல்லை தான் உண்டு.

கூடுமானால், $\underset{z\to a}{\text{எல்லை}}\ f(z) = l$ ஆகவும்

$$\underset{z\to a}{\text{எல்லை}}\ f(z) = m \text{ ஆகவும் இருக்கட்டும்.}$$

$l = m$ என நிரூபிப்போம்.

கொள்கைப்படி, கொடுக்கப்பட்ட ε-க்கு ஏற்ப δ ஐ

$0 < |z-a| < \delta$ ஆனால், $|f(z)-l| < \varepsilon/2$ ... (1)

$0 < |z-a- < \delta$ ஆனால், $|f(z)-m| < \varepsilon/2$ ... (2)

எனக் கண்டுபிடிக்க முடியும்.

$$\begin{aligned} \therefore |l-m| &= |l-f(z)+f(z)-m| \\ &\leq |l-f(z)| + | |f(z)-m| \\ &< \varepsilon/2+\varepsilon/2 < \varepsilon. \\ &\therefore l = m. \end{aligned}$$

பின்வரும் தேற்றங்களை, மெய்மாறிகளின் பகு இயல் முறைப்படி எளிதாக நிரூபிக்கலாம்.

$\underset{z\to a}{\text{எல்லை}}\ f(z) = l$ ஆகவும், $\underset{z\to a}{\text{எல்லை}}\ g(z) = m$ ஆகவும் இருந்தால்,

(i) $\underset{z\to a}{\text{எல்லை}}\ \{f(z) \pm g(z)\} = l \pm m$

(ii) $\underset{z\to a}{\text{எல்லை}}\ f(z)g(z) = lm$

(iii) $m \neq 0$ ஆனால் $\underset{z\to a}{\text{எல்லை}}\ \dfrac{1}{g(z)} = \dfrac{1}{m}$

(iv) $m \neq 0$ ஆனால் $\underset{z\to a}{\text{எல்லை}}\ \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{l}{m}$

ஓர் எடுத்துக் காட்டு

$\underset{z\to 0}{\text{எல்லை}}\ \dfrac{\bar{z}}{z}$ இல்லை என நிரூபி.

z ஆனது மெய்யச்சு வழியே ஆதியை அணுகுகிறது எனக் கொள்க. அப்படியானால் $y=0$... $\therefore z=x$. மேலும் $\bar{z}=x$.

$$\therefore \underset{z\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\bar z}{z} \underset{x\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{x}{x} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

இனி, z ஆனது கற்பனை அச்சு வழியே ஆதியை அணுகுகிறது எனக் கொள்க, அப்படியானால் $x = 0$

$\therefore z = iy$. மேலும் $\bar z = -iy$.

$$\therefore \underset{z\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\bar z}{z} = \underset{y\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{-iy}{iy} = -1 \ldots\ldots\ldots (2)$$

(1) ம் (2) ம் மாறுபட்டவை ஆதலின் எல்லை இருக்க முடியாதென்பது தெளிவாகிறது.

2.5 தொடர்ச்சி: $\underset{z\to a}{\text{எல்லை}} f(z) = f(a)$ ஆனால் $f(z)$ என்ற சார்பு $z=a$ என்னும் புள்ளியில் தொடர்புடைச் சார்பு என்று சொல்வோம். D என்ற அரங்கில் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் $f(z)$ தொடர்ச்சி உள்ளதாக இருந்தால் $f(z)$ ஐ D என்ற அரங்கத்தில் தொடர்புடைச் சார்பு எனலாம்.

இவ்வரையறையிலிருந்து (I) $\underset{z\to a}{\text{எல்லை}} f(z) = l$ என்ற எல்லை இருக்க வேண்டும். பக்கம் 30 ல் உள்ள எடுத்துக் காட்டில் $\underset{z\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\bar z}{z}$ இல்லை எனப் பார்த்தோம். $\therefore z=0$ ல் $\bar z/z$ தொடர்புடைச் சார்பு அல்ல என முடிவு செய்யலாம்.

(ii) $f(a)$ வரையறுக்கப்பட்டு இருக்க வேண்டும். $\frac{1}{(z-i)\ (z+2)^2}$ என்ற சார்பு i, -2 என்ற புள்ளிகளில் வரையறுக்கப்படவில்லை. எனவே, இப்புள்ளிகளில் இச்சார்பு தொடர்ச்சியாக இராது.

(iii) $l=f(a)$ ஆக இருக்க வேண்டும்.

$f(z) = \begin{cases} z^2, & z\neq 3 \\ 0, & z=3 \end{cases}$ என்ற சார்பை எடுத்துக்கொள். $z=3$ ல் $l=9$ ஆகும். ஆனால் $f(3) = 0$. $\therefore z=3$ல் இச்சார்பு தொடர்ச்சியாக இராது.

2.6 தேற்றம் 1: ஒரு தொடர்புடைச் சார்பின் மெய்ப் பகுதியும், கற்பனைப் பகுதியும் தொடர்புடைச் சார்புகளாகும்.

$w=u+iv$ என்ற சார்பு $z=z_1$ல் தொடர்ச்சியாக இருக்கட்டும். அப்படியானால்,

$0<|z-z_1|<\delta$ ஆனால், $|w-w_1|<\varepsilon$

$\therefore\ |u+iv-(u_1+iv_1)|<\varepsilon$

$\therefore\ |u-u_1+i(v-v_1)|<\varepsilon$

$\therefore\ \sqrt{(u-u_1)^2+(v-v_1)^2}<\varepsilon$

$\therefore\ |u-u_1|<\varepsilon$, மேலும் $|v-v_1|<\varepsilon$

$\therefore$ u யும், v யும் தொடர்புடைச் சார்புகள் ஆகும்.

பயிற்சி. இதன் மறுதலையை நிரூபி.

தேற்றம் 2: $z=a$ என்ற புள்ளியில் $f(z)$ ஆனது l என்ற மதிப்பைப்பெற்று தொடர்புடைச் சார்பாக இருக்கட்டும். $g(z)$ ஆனது $z=l$ ல் தொடர்புடைச் சார்பாக இருந்தால் $g\{(f)z\}$ ஆனது $z=a$ ல் தொடர்புடைச் சார்பாகும்.

கொள்கைப்படி, $|z-a|<\delta$ ஆனால் $|f(z)-l|<\varepsilon$ ஆகும். மேலும், $|t-l|<\varepsilon$ ஆனால் $|g(t)-g(l)|<\eta$ ஆகும்.

இப்போது, $t=f(z)$ என இடு.

$\therefore\ |z-a|<\delta$ ஆனால் $|g\{f(z)\}-g\{f(a)\}|<\eta$

$\therefore\ g\{f(z)\}$ ஆனது $z=a$ ல் தொடர்ச்சியாக இருக்கும். பின் வரும் தேற்றங்களை எளிதாக நிரூபிக்கலாம்.

1. $f_1(z), f_2(z), \ldots f_n(z)$ என்பவை தொடர்ச்சியுள்ள சார்புகளாயின்

$f_1(z)+f_2(z)+\ldots+f_n(z)$ என்பதும்

$f_1(z)\cdot f_2(z)\ldots f_n(z)$ என்பதும்

தொடர்ச்சியுள்ள சார்புகளாக இருக்கும். இதில் n என்பது முடிவுள்ள முழு மிகை எண்.

2. $f(z)$ யும், $g(z)$ யும் தொடர்புடைச் சார்புகளானால் $f(z)/g(z)$ யும் தொடர்புடைச் சார்பாகும். இதற்கு விதிவிலக்கான புள்ளிகள் $g(z)$ ஐ பூச்சியமாக்குபவை.

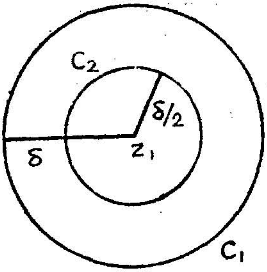
2·7 ஒரு சீரான தொடர்ச்சி

D என்ற அடைத்த அரங்கத்தை எடுத்துக் கொள். இதில் உள்ள a என்ற எப்புள்ளியிலும், $0<|z-a|<\delta$ ஆனால், $|f(z)-f(a)|<\varepsilon$ என இருக்கும்படி, கொடுக்கப்பட்ட ε-க்கு ஏற்ப δ-ஐக் கண்டுபிடிக்க முடியுமானால் $f(z)$-ஐ, D-யில் ஒரு சீரான தொடர்புடைச் சார்பு என்று சொல்வோம்.

தேற்றம் : D என்ற அடைத்த அரங்கில் $f(z)$ ஒரு தொடர்புடைச் சார்பாக இருந்தால் அவ்வரங்கில் அச்சார்பு ஒரு சீரான தொடர்ச்சி உடையதாகும்.

இதை நிரூபிக்கப் பின்வரும் துணைக் கோட்பாடு (lemma) துணை புரியும்.

C_1, C_2 என்பவை முறையே $|z-z_1|=\delta$; $|z-z_1|=\delta/2$ என்ற வட்டங்கள். z_2 என்பது C_2-ன் மேல் அல்லது உள்ளே உள்ள புள்ளி. z ஆனது C_1 என்ற வட்டத்தினுள் இருக்கும்போது $|f(z)-f(z_1)|<\varepsilon$ ஆக இருந்தால்; $|z-z_2|<\frac{\delta}{2}$ ஆக இருக்கும்போது $|f(z)-f(z_2)|<2\varepsilon$ ஆகும்.



படம்—6.

நிரூபணம் : z, z_2 என்பவை C_1 வட்டத்தினுள் இருந்தால்

$$\begin{aligned}|f(z)-f(z_2)| &= |f(z)-f(z_1)+f(z_1)-f(z_2)| \\ &\le |f(z)-f(z_1)| + |f(z_1)-f(z_2)| \\ &< \varepsilon+\varepsilon \\ &< 2\varepsilon\end{aligned}$$

ஆனால், C_1-க்குள் உள்ள C_2 வில் z_2 இருந்தால்,

$$|z-z_2|<\delta/2$$

என்பதற்கிணங்க உள்ள z என்னும் புள்ளி C_1-குள் தான் இருக்கும். ∴ துணைக் கோட்பாட்டின் நிரூபணம் பூரணமடைகிறது.

இப்பொழுது, ஒரு சீரான தொடர்ச்சிக்கு நாம் வேண்டுவது, ஒவ்வொரு ε-க்கும்

$$|z-z_1|<\delta \text{ ஆனால், } |f(z)-f(z_1)|<\varepsilon \quad \ldots (1)$$

ஆக இருக்க வேண்டும்.

கூடுமானால், (1) உண்மையல்ல எனக் கொள்க. இப்போது D என்ற அரங்கத்தை அச்சுகளுக்கு இணையாகக் கோடுகள் வரைந்து சிறிய பகுதிகளாக்குவோம். இச்சிறிய பகுதிகளில் ஒன்றில், (1) உண்மையல்ல. இதில் (அதாவது, D என்ற அரங்கின் பகுதிக்குள் உள்ள சிறு பகுதிக்குள் உள்ள மிகச் சிறிய பகுதியில்) z_1 இருக்கட்டும். ஆனால், $f(z)$ ஆனது z_1-ல் தொடர்ச்சி உள்ளது.

$$\therefore |z-z_1| < 2\delta \text{ ஆனால் } |f(z)-f(z_1)| < \varepsilon / 2.$$

∴ துணைக் கோட்பாட்டின்படி

$$|z-z_2| < \delta \text{ ஆனால் } |f(z)-f(z_2)| < \varepsilon.$$

இதில் z_2 என்பது $|z-z_1| = \delta$ என்ற வட்டத்தில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளி ஆகும். ∴ இதன்படி (1) உண்மையாகும். ஆனால், நாம் சிறு பகுதிகள் ஆக்கிக் கொண்டே போனால், அது இவ் வட்டத்தினுள் உள்ள ஒரு சிறு பகுதியாகவும் இருக்கும். எனவே இங்கு (1) உண்மையல்ல. இவை ஒன்றுக் கொன்று முரணான முடிவுகள். ∴ $f(z)$ ஒரு சீரான தொடர்ச்சியுள்ளதாய் இருக்க வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு: $|z| < 1$ என்ற அரங்கில் $f(z) = \dfrac{1}{z}$ ஒரு சீரான தொடர்ச்சி உடையதல்ல என நிரூபி.

$f(z) = 1/z$ ஒரு சீரான தொடர்ச்சி உள்ளதாக இருக்கட்டும். அப்படியானால்,

$$|z-a| < \delta \text{ எனில், } |f(z)-f(a)| < \varepsilon$$

என்பதற்கிணங்க δஐக் கண்டுபிடிக்க இயலும்.

$$z = \delta\ (< 1);\ a = \frac{\delta}{1+\varepsilon} \text{ எனக் கொள்க.}$$

$$|z-a| = \left| \delta - \frac{\delta}{1+\varepsilon} \right| = \frac{\delta\varepsilon}{1+\varepsilon} < \delta.$$

$$\text{ஆனால், } \left| \frac{1}{z} - \frac{1}{a} \right| = \left| \frac{1}{\delta} - \frac{1+\varepsilon}{\delta} \right| = \frac{\varepsilon}{\delta} > \varepsilon.$$

ஏனெனில் $\delta < 1$.

இது ஒரு முரண்பாடு. எனவே $f(z)$ ஒரு சீரான தொடர்ச்சி யுள்ள தல்ல.

2·8. இனி, இரு மெய் மாறிகளின் சார்புகள் பற்றி இரு குறிப்புகள் தருவோம்.

குறிப்பு 1: $u(x\ y)$ என்பது x, y என்ற மெய் மாறிகளின் சார்பாக இருக்கட்டும். இது D என்ற அரங்கத்தில் ஒரு சீரான தொடர்ச்சியுடையதாக இருக்க நிபந்தனை என்ன? கொடுக்கப் பட்ட εக்கு ஏற்ப, $|\Delta x| < \delta$, $|\Delta y| < \delta$ ஆக இருக்கும் போது

$$|u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x, y)| < \varepsilon.$$

ஆக இருக்கும்படி δஐக் கண்டுபிடிக்கக் கூடியதாய் இருக்க வேண்டும்.

மேலும், கொடுக்கப்பட்ட D என்ற அடைத்த அரங்கில் $u(x, y)$ தொடர்புடைச் சார்பாக இருந்தால், அச்சார்பு அவ் வரங்கில் ஒரு சீரான தொடர்ச்சியுடையதாகும்.

குறிப்பு 2: D என்ற அரங்கில் $u(x, y)$ என்ற தொடர்புடைச் சார்பு பகுதி வகைக் கெழுக்களை உடையதாக இருந்தால்

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$$

ஆகும். இதில் $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ ஆகும் போது $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$ ஆகும்.

நிருபணம். $\Delta u = u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x, y)$

$$\Delta u = \{u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x, y+\Delta y)\}$$

$$+ \{u(x, y+\Delta y) - u(x, y)\}$$

$$= \Delta x.\frac{\partial u}{\partial x}(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)$$

$$+ \Delta y.\frac{\partial u}{\partial y}(x, y+\theta_2\Delta y)$$

இதில் $0 < \theta_1 < 1$; $0 < \theta_2 < 1$.

மேலும் $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ தொடர்ச்சியுள்ளவைகள். ஆகையால் ஒரு சீரான தொடர்ச்சிக்கான நிபந்தனைப்படி

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x+\theta_1 \Delta x, y+\Delta y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}+\alpha$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y+\theta_2 \Delta y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}+\beta.$$

என்பவற்றில் $|\Delta x| < \delta;\ |\Delta y| < \delta$ ஆனுல்

$|\alpha| < \varepsilon$ ஆகவும், $|\beta| < \varepsilon$ ஆகவும் இருக்கும்.

$$\therefore \Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\cdot\Delta y$$

2·9. பல மதிப்புகளுடைய சார்பு

$w = f(z) = z^{1/n}$ ஆனுல் $f(z)$ க்கு n வித்தியாசமான மதிப்புகள் உண்டு என்பதை முன்னரே பார்த்தோம் (n ஒரு முழு மிகை எண்). இதைப் பலமதிப்புடைய சார்புக்கு உதாரணமாகக் கொள்ளலாம். பொதுவாக, கொடுக்கப்பட்ட ஒரு zன் மதிப்புக்கு $f(z)$ ஆனது இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட மதிப்புகளே உடையதாயின் அது பல்மதிப்புடைச் சார்பு ஆகும்.

$w = f(z) = \sqrt{z}$ஐ எடுத்துக் கொள். $w = u+iv$ எனக் குறிப்பிடுவது வழக்கம். ஆகவே, w-தளத்தில் u என்பதுமெய்யான அச்சாகவும், v என்பது கற்பனை அச்சாகவும் இருக்கும்.

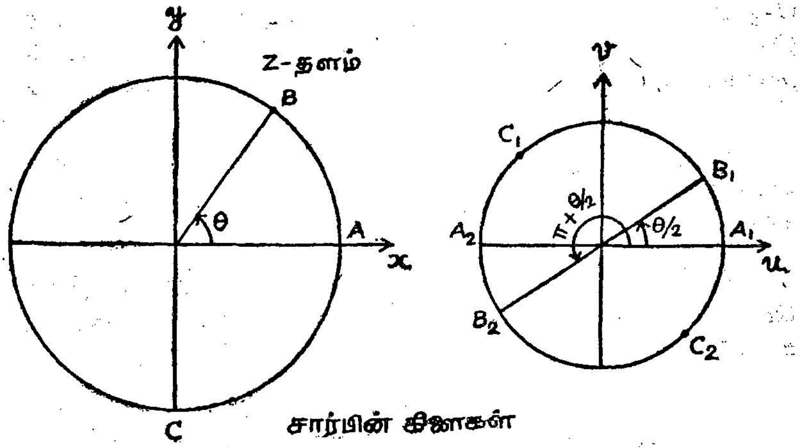
$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ஆனுல்,

w ஆனது (i) $w_1 = r^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$

(ii) $w_2 = r^{\frac{1}{2}}\left\{\cos\left(\pi+\frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\pi+\frac{\theta}{2}\right)\right\}$

என்ற இரு மதிப்புகளே உடையது ஆகும். இதில் $w_2 = -w_1$ என்பதை நாம் எளிதில் காணலாம்.

இப்பொழுது z-ன் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கிணங்க w_1-உம் மாறும்; w_2-உம் மாறும். ஆகவே, இவை இரண்டையும் w என்ற இருமதிப்புடைச் சார்பின் கிளைகள் என்று சொல்வோம். ஆனுல், w_1, w_2 என்பவை தனித்தனியே ஒரு மதிப்புடைய சார்புகள் என்பதைக் கவனி.



படம் 7

z ஆனது *A* (*r*, 0) என்னும் புள்ளியிலிருந்து புறப்படட்டும். அப்படியானால் w_1, w_2 என்பவற்றின் ஆரம்ப மதிப்புகள் முறையே $r^{\frac{1}{2}}$, $-r^{\frac{1}{2}}$ ஆகும். இவற்றைப் படத்தில் A_1, A_2 என குறித்து உள்ளோம்.

இப்பொழுது, *z* ஆனது *A*-யிலிருந்து புறப்பட்டு *B*, *C* வழியே சென்று வட்டத்தைப் பூர்த்தி செய்யும்போது, w_1 ஆனது A_1-லிருந்து புறப்பட்டு B_1, C_1 வழியே சென்று $A_1\ B_1\ C_1\ A_2$ என்ற அரை வட்டத்தைப் பூர்த்தி செய்யும்; மேலும், w_2 ஆனது A_2-லிருந்து புறப்பட்டு B_2, C_2 வழியே சென்று $A_2\ B_2\ C_2\ A_1$ என்ற அரை வட்டத்தைப் பூர்த்தி செய்யும்.

பொதுவாக, *z* ஆனது *B*-யில் இருக்கும்போது, அதன் வீச்சம் θ ஆனால், w_1 ஆனது $\frac{\theta}{2}$ ஐ வீச்சமாக உடைய B_1-லும், w_2 ஆனது $\pi + \frac{\theta}{2}$ ஐ வீச்சமாக உடைய B_2-லும் இருக்கும் என்பது தெளிவு.

z-ன் வீச்சம் 2π அளவில் மாறும்போது, அதாவது, *z*-ன் ஒரு வட்ட பயண இறுதியில் w_1 ஆனது w_2-ன் ஆரம்ப புள்ளியான A_2-விலும், w_2 ஆனது w_1-ன் ஆரம்பப்புள்ளியான A_1-லும் இருப்பதைக் கவனி. *O* என்னும் புள்ளியை *z* ஆனது ஒரு சுற்று

சுற்ற w_1, w_2 என்ற கிளைகள் ஒன்றுக்கொன்று இடம் மாறுவதால் O-ஐ கிளைப்புள்ளி என்று சொல்லுகிறோம். z ஆனது வட்டத்தை இருமுறை சுற்றினால் w_1-உம், w_2-உம் திரும்பவும் தங்கள் தங்களது ஆரம்ப புள்ளிகளான A_1, A_2-க்கு வந்து விடும் என்பதை நோக்குக.

மேலும், z செல்லும் பாதை ஆதியைச் சுற்றி அமையா விட்டால், கிளைகளில் ஒருவித மாற்றமும் ஏற்படாது என்பதைக் கவனி.

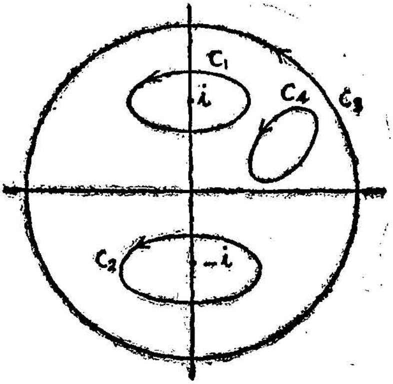
மற்றோர் உதாரணமாக, $w=f(z)=\sqrt{z^2+1}$ ஐ எடுத்துக் கொள்வோம். $w=\sqrt{(z+i)(z-i)}$ என எழுதலாம். இப்பொழுது, $z=\pm i$ என்பவை கிளைப்புள்ளிகள் எனக் காண்பிப்போம்.

வீச்சம் $w=\frac{1}{2}$ {வீச்சம் $(z-i)$ + வீச்சம்$(z+i)$}

∴ w-ன் வீச்ச மாற்றம்

$=\frac{1}{2}$ {$(z-i)$-ன் வீச்ச மாற்றம் + $(z+i)$-ன் வீச்ச மாற்றம்}

C_1 என்பது $(-i)$ ஐ விடுத்து, i ஐ மட்டும் சுற்றிவரும் அடைத்த



படம்—8.

கோடாக இருக்கட்டும். அப்படியானால் z ஆனது C_1 ஐ ஒரு முறை இடஞ்சுழியாக சுற்றிவர, $(z-i)$-ன் வீச்ச மாற்றம் $=2\pi$. ஆனால் $(z+i)$-ன் வீச்ச மாற்றம் $=0$. ∴ w-ன் வீச்ச மாற்றம் $=\pi$. ஆகவே, w ஆனது தனது ஆரம்ப மதிப்பை அடையாது. அதாவது, w-ன் கிளைகளில் மாற்றம் ஏற்பட்டுள்ளது. $z=i$ ஐப் பூரணமாகச் சுற்றிவர, w-ன் கிளைகளில் மாற்றம் ஏற்படுவதால் $z=i$ ஒரு கிளைப் புள்ளி ஆகும். இதேவிதமாக $z=-i$ யும் ஒரு கிளைப்புள்ளி என நிரூபிக்கலாம்.

இப்போது C_3 என்ற அடைத்த வளைகோடு $\pm i$ என்ற இரு புள்ளிகளையும் உள்ளே கொண்டுள்ளது. $\therefore (z-i)$-ன் வீச்ச மாற்றம் $=2\pi=(z+i)$-ன் வீச்சமாற்றம்.

$\therefore$ w-ன் வீச்ச மாற்றம் $=\frac{1}{2}(2\pi+2\pi)=2\pi$.

$\therefore$ w-ன் கிளைகளில் ஒரு மாற்றமும் ஏற்படாது.

இதேவிதமாக $\pm i$ என்ற இருபுள்ளிகளையும் நீக்கிய C_4 வழியே z சென்றாலும் w-ன் வீச்ச மாற்றம் $=\frac{1}{2}(0+0)=0$. எனவே w-ன் கிளைகளில் ஒரு மாற்றமும் ஏற்படாது.

வேறுமுறை: $z-i=r_1e^{i\theta_1}$; $z+i=r_2e^{i\theta_2}$

ஆனால் $w=\sqrt{(z-i)(z+i)}$

$$=\sqrt{r_1r_2}\ e^{i(\theta_1+\theta_2)/2}$$

z-ன் ஆரம்ப புள்ளியில் $\theta_1=\alpha_1$ ஆகவும், $\theta_2=\alpha_2$ ஆகவும் இருக்கட்டும். அப்படியானால் w-ன் ஆரம்ப மதிப்பு

$$=\sqrt{r_1r_2}\ e^{i(\alpha_1+\alpha_2)/2} \text{ ஆகும்.}$$

C_1 ஐச் சுற்றிய பின் $\theta_1=\alpha_1+2\pi$ ஆகும். ஆனால் $\theta_2=\alpha_2$ தான்.

$$\therefore w=\sqrt{r_1r_2}\ e^{i(\alpha_1+2\pi+\alpha_2)/2}$$

$$=-\sqrt{r_1r_2}\ e^{i(\alpha_1+\alpha_2)/2}$$

இது w-ன் ஆரம்ப மதிப்பிலிருந்து வேறுபட்டது. ஆகவே w-ன் கிளைகளில் மாற்றம் ஏற்பட்டுள்ளது.

$\therefore$ $z=i$ ஒரு கிளைப்புள்ளி.

இதேவிதமாக, z ஆனது C_3 வழியே ஒரு பூரண சுற்று சுற்றும்போது,

$$w=\sqrt{r_1r_2}\ e^{i(\alpha_1+2\pi+\alpha_2+2\pi)/2}$$

$$=\sqrt{r_1r_2}\ e^{i(\alpha_1+\alpha_2)/2}$$

w-ல் ஒரு மாற்றமும் இல்லை.

மேலும் z ஆனது C_4 வழியே ஒரு பூரண சுற்று சுற்றும்போது

$$w = \sqrt{r_1 r_2} \quad e^{i\,(a_1+0+a_2+0)/2}$$

$$= \sqrt{r_1 r_2} \quad e^{i\,(a_1+a_2)/2}$$

இப்போதும் w-ல் ஒரு மாற்றமும் இல்லை.

2.10. வகையிடத்தக்க சார்பு

$f(z)$ என்பது D என்ற அரங்கத்தில் ஒரு மதிப்புடைய சார்பாக இருக்கட்டும். $z=a$ என்னும் புள்ளியில் $f(z)$-ன் வகைக் கெழுவை

$$f'(a) = \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}} \; \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

என வரையறை செய்கிறோம். இதில், இந்த எல்லை இருக்க வேண்டும் என்பதும், h ஆனது எவ்வழியில் பூச்சியத்தை அணுகினாலும் $f'(a)$ மாறாதிருக்க வேண்டும் என்பதும் நோக்கத் தக்கது. இவ்வாறு இருந்தால் $f(z)$ ஆனது $z=a$-ல் வகையிடத் தக்கது என்று சொல்கிறோம்.

2.11. (i) வகையிடத்தக்க சார்புகள் தொடர்புடைச் சார்புகளாக இருக்கவேண்டும்; ஆனால் (ii) எல்லா தொடர் புடைச் சார்புகளும் வகையிடத்தக்கன அல்ல.

$$\text{(i)} \quad f'(a) = \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}} \; \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$\therefore \; f'(a) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} + \varepsilon$$

இதில் h பூச்சியத்தை அணுக, ε-உம் பூச்சியத்தை அணுகும்.

$$\therefore \; hf'(a) = f(a+h) - f(a) + h\varepsilon.$$

இப்போது h பூச்சியத்தை அணுகட்டும்.

$$\therefore 0 = \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}} \; f(a+h) - f(a) + 0$$

$$\therefore \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}} \; f(a+h) = f(a)$$

$\therefore f(z)$ ஆனது, $z=a$-ல் ஒரு தொடர்புடைச் சார்பாகும்,

(ii)ஐ நிரூபிக்க ஒரு எடுத்துக்காட்டு போதுமானது.

$|z|^2$ என்பது தொடர்புடைச் சார்பு என்பது தெளிவு. நாம் இதை வகையிடத்தக்கதல்ல என நிரூபிப்போம்.

$$f'(a) = \underset{h\to o}{\text{எல்லை}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$= \underset{h\to o}{\text{எல்லை}} \frac{|a+h|^2 - |a|^2}{h}$$

$z = a+h$ எனக் கொள்வோம்

$$\therefore f'(a) = \underset{z\to a}{\text{எல்லை}} \frac{|z|^2 - |a|^2}{z-a}$$

$$= \underset{z\to a}{\text{எல்லை}} \frac{z\bar{z} - a\bar{a}}{z-a}$$

$$= \underset{z\to a}{\text{எல்லை}} \quad \bar{z} + a \frac{(\bar{z} - \bar{a})}{(z-a)}$$

$z - a = R(\cos\theta + i\sin\theta)$ ஆனால், $\bar{z} - \bar{a} = R(\cos\theta - i\sin\theta)$ ஆகும்.

$$\therefore \frac{\bar{z}-\bar{a}}{z-a} = \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{(\cos\theta - i\sin\theta)^2}{\cos^2\theta + \sin^2\theta}$$

$$= \cos 2\theta - i\sin 2\theta$$

$$\therefore f'(a) = \underset{z\to a}{\text{எல்லை}} \quad \bar{z} + a(\cos 2\theta - i\sin 2\theta) \qquad \ldots (1)$$

இதில் θ என்பது $(z-a)$-ன் வீச்சமாகும். θவுக்கு வெவ்வேறு மதிப்புகளைக் கொடுக்கலாமாதலின் $f'(a)$க்கு மாறாத ஓர் எல்லை கிடைக்காது என்பது (1) லிருந்து தெரிகிறது. அதாவது, $f(z)$ வகையிடத்தக்கதல்ல. (2·16) ஐயும் பார்க்கவும்)

2·12. பகுமுறைச் சார்பு

$f(z)$ ஆனது D என்ற அரங்கத்தில் (குறிப்பிட்ட சில புள்ளிகளைத் தவிர) எல்லாப் புள்ளிகளிலும் வகையிடத்தக்கதாயிருந்தால் அதைப் பகுமுறைச் சார்பு என்று சொல்கிறோம். வகைக்கெழு காண இயலாத குறிப்பிட்ட சில புள்ளிகளைச் சிறப்பு புள்ளிகள் (Singular points) என்போம், Dயின் எல்லாப் புள்ளிகளிலும் வகையிடத்தக்கதாயிருந்தால்—அதாவது, சிறப்புப் புள்ளிகளே இல்லாமலிருந்தால்—$f(z)$ ஐ ஒழுங்கான சார்பு (Regular function) என்று சொல்வோம்.

குறிப்பு : பல புத்தகங்களில் பகுமுறைச் சார்புக்கும், ஒழுங்கான சார்புக்கும் உள்ள வேற்றுமையைப் பெரிதாகக் கருதாமல் இரண்டையும் ஒரே பேரால் அழைப்பதுண்டு. இப்புத்தகமும் அதற்கு விதி விலக்கல்ல.

2·13 காஷி, ரைமன் சமன்பாடுகள்

தேற்றம் 1: $w=f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ என்ற சார்பு, D என்ற அரங்கத்தில், பகுமுறைச் சார்பாக இருந்தால், Dயின் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும்

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\,;\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \qquad \ldots (1)$$

என்பதற்கிணங்க இருக்கும். இவை காஷி, ரைமன் சமன்பாடுகள் எனப்படும்.

நிரூபணம் : $f(z)$ ஒரு பகுமுறைச் சார்பு என கொடுக்கப் பட்டுள்ளது. $\therefore f'(z)$ இருக்க வேண்டும், மேலும்,

$$f'(z)=\underset{\delta z\to 0}{\text{எல்லை}}\ \frac{f(z+\delta z)-f(z)}{\delta z}$$

என்பதன் மதிப்பு, δz எவ்வழியாகப் பூச்சியத்தை அணுகினாலும் மாறாதிருக்க வேண்டும்.

இப்பொழுது, $z=x+iy$. $\therefore \delta z=\delta x+i\delta y$. $\delta z\to 0$ $\therefore$ $\delta x\to 0$, மேலும் $\delta y\to 0$. எனவே,

$$f'(z)=\underset{\delta x\to 0,\ \delta y\to 0}{\text{எல்லை}}\ \frac{[u(x+\delta x, y+\delta y)+iv(x+\delta x, y+\delta y)]-[u(x, y)+iv(x, y)]}{\delta x+i\delta y}$$

இப்பொழுது, y மாறிலியாக இருக்கட்டும். எனவே $\delta y=0$.

$\therefore$ $\delta z=\delta x$; $\delta z\to 0$ ஆனதால், $\delta x\to 0$

$$\therefore f'(z)=\underset{\delta x\to 0}{\text{எல்லை}}\ \frac{[u(x+\delta x, y)+iv(x+\delta x, y)]-[u(x,y)+iv(x, y)]}{\delta x}$$

$$=\underset{\delta x\to 0}{\text{எல்லை}}\left[\frac{u(x+\delta x, y)-u(x, y)}{\delta x}+\frac{iv(x+\delta x, y)-v(x, y)}{\delta x}\right]$$

$$\text{i.e. } f'(z)=u_x+iv_x \qquad \ldots (2)$$

இனி x மாறிலியாக இருக்கட்டும். எனவே $\delta x = 0$.

$\therefore$ $\delta z = \delta y$; $\delta z \to 0$ ஆனதால் $\delta y \to 0$.

$$f'(z) = \underset{\delta y \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{[u(x, y+\delta y) + iv(x, y+\delta y)] - [u(x,y) + iv(x,y)]}{i\delta y}$$

$$= \underset{\delta y \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{1}{i}\left[\frac{u(x, y+\delta y) - u(x,y)}{\delta y} + i\,\frac{v(x, y+\delta y) - v(x,y)}{\delta y}\right]$$

$$= \frac{1}{i}[u_y + iv_y]$$

$$f'(z) = v_y - iu_y \qquad \ldots (3)$$

ஆனால், $f'(z)$ மாறாமல் இருக்கும் வகைக்கெழு. எனவே (2), (3)-ல் இருந்து $u_x + iv_x = v_y - iu_y$ $\therefore$ $u_x = v_y$; $v_x = -u_y$, என்ற காஷி, ரைமன் சமன்பாடுகள் கிடைக்கின்றன. இவை, $f(z)$ பகுமுறைச் சார்பாக இருக்கத் தேவையான நிபந்தனைகள் ஆகும். ஆனால் போதுமான நிபந்தனைகள் அல்ல. அவற்றை அடுத்த தேற்றத்தில் காண்போம்.

2.14. தேற்றம் 2 :

D என்ற அரங்கத்தில் u, v என்பன வகையிடத்தக்கதாய் $u_x = v_y$, $v_x = -u_y$ என்பதற்கிணங்க இருக்கட்டும். மேலும், u_x, u_y, v_x, v_y என்பன *D*-ல் தொடர்புடைச் சார்புகளாக இருந்தால்

$$w = f(z) = u + iv$$

என்பது பகுமுறைச் சார்பாக இருக்கவேண்டும்.

நிரூபணம்:

$$\delta u = u(x+\delta x, y+\delta y) - u(x,y)$$

$$= [u(x+\delta x, y+\delta y) - u(x, y+\delta y)] + [u(x, y+\delta y) - u(x,y)]$$

$$= \delta x \cdot u_x(x+\theta\cdot\delta x, y+\delta y) + \delta y \cdot u_y(x, y+\theta'\delta y)$$

இங்கு $0 < \theta < 1$; $0 < \theta' < 1$.

குறிப்பு: u என்பது வகையிடத்தக்கது. எனவே, இடை மதிப்புத் தோற்றத்தின்படி, பின்வருவன கிடைக்கின்றன.

$$u(x+\delta x)-u(x)=\delta x.\ u'(x+\theta\delta x)=\delta x.\ u_x(x+\theta\delta x)$$

$$u(y+\delta y)-u(y)=\delta y.\ u'(y+\theta'\delta y)=\delta y.\ u_y(y+\theta'\delta y)$$

மேலும், u_x, u_y தொடர்புடைச் சார்புகள்

$$\therefore\quad |u_x(x+\theta\delta x,\ y+\delta y)-u_x(x,y)|<\varepsilon_1$$

$$|u_y(x,\ y+\theta'\delta y)-u_y(x,y)|<\varepsilon_2$$

$$\therefore\quad \delta u=\delta x\,(u_x+\varepsilon_1)+\delta y\,(u_y+\varepsilon_2)$$

இதேவிதமாக, $\delta v=\delta x\,(v_x+\varepsilon_3)+\delta y\,(v_y+\varepsilon_4)$

இங்கு $\varepsilon_r\to 0$ $r=1,2,3,4.$

இப்பொழுது, $\delta w=\delta u+i\,\delta v$

$$\text{i.e.}\quad \delta w=\delta x\,(u_x+\varepsilon_1)+\delta y\,(u_y+\varepsilon_2)+i\,[\delta x\,(v_x+\varepsilon_3)+\delta y\,(v_y+\varepsilon_4)]$$

$$=(u_x+iv_x)\,(\delta x+i\delta y)+\varepsilon_5\,\delta x+\varepsilon_6\,\delta y$$

ஏனெனில் $u_x=v_y;\ v_x=-u_y.$

மேலும் $\varepsilon_5=\varepsilon_1+i\,\varepsilon_3$, $\varepsilon_6=\varepsilon_2+i\,\varepsilon_4$ எனக்கொள்க.

$$\therefore\quad \frac{\delta w}{\delta z}=\frac{(u_x+iv_x)\,(\delta x+i\delta y)+\varepsilon_5\,\delta x+\varepsilon_6\,\delta y}{\delta x+i\,\delta y}$$

$$=u_x+i\,v_x+\varepsilon_5.\frac{\delta x}{\delta x+i\,\delta y}+\varepsilon_6.\frac{\delta y}{\delta x+i\,\delta y}$$

$\delta z\to 0$ ஆனுல் $\delta x\to 0$, $\delta y\to 0$.

$$\text{மேலும்}\quad \left|\frac{\delta x}{\delta x+i\,\delta y}\right|<1;\quad \left|\frac{\delta y}{\delta x+i\,\delta y}\right|<1$$

பின்னரும் $\varepsilon_r\to 0$, $r=1,2,3,4$ ஆனதால் $\varepsilon_r\to 0$ $r=5,6$

$$\therefore\quad \frac{dw}{dz}=u_x+i\,v_x \qquad \dots\ (1)$$

u_x, v_x இருக்கின்றன என்பதும், அவை ஒவ்வொன்றும் ஒரே மதிப்புடையன என்பதும் நமக்குத் தெரியும்.

$\therefore\ \dfrac{dw}{dz}=f'(z)$ இருக்கிறது; அது ஒரே மதிப்புடையது.

$\therefore$ $f(z)$ ஆனது D யில் ஒரு பகு முறைச் சார்பாகும்.

2·15 (i) கிளைத்தேற்றம் 1:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{i}\ \frac{\partial w}{\partial y}$$

நிருபணம் 2·14 (1)-ல் இருந்து

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\ \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial\ (u+i\ v)}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x}$$

பயிற்சி : $\frac{dw}{dz} = \frac{1}{i}\ \frac{dw}{dy}$ என நிருபிக்க.

2·15 (ii) கிளைத்தேற்றம் 2:

$f'\ (z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\ \frac{\partial v}{\partial x}$. ஏனெனில் சமன்பாடு (1) ன் படி. $f'\ (z) = u_x + i\ v_x$.

ஆனால் $u_x = v_y$, $v_x = -u_y$ என்பவை காஷி, ரைமன் சமன்பாடு களாகும். எனவே, கிளைத்தேற்றம் 2ன் நிருபணம் பூரண மாகிறது.

இதிலிருந்து, ஒரு சார்பின் வகைக்கெழுவைக் காண, அதன் மெய்ப்பகுதியான u அல்லது கற்பனைப் பகுதியான v தெரிந்திருந் தால் போதுமானது என அறிகிறோம்.

2·16 $|\ z\ |^2$ பகுமுறைச் சார்பல்ல என நிருபி.

(2·11 (ii) ஐயும் ஒப்பிடுக)

$w = |\ z\ |^2 = x^2 + y^2$

$\therefore\ u = x^2 + y^2;\quad v = 0$

$\therefore\ u_x = 2x,\quad u_y = 2y,\quad v_x = 0,\quad v_y = 0.$ இவை காஷி ரைமன் சமன்பாடுகளுக்கு இணங்கவில்லை.

$\therefore\ |\ z\ |^2$ பகுமுறைச் சார்பல்ல.

2·17 இசைச்சார்புகள்:

$\phi\ (x, y)$ என்ற சார்பு தொடர்ச்சியாக உள்ள பகுதி வகைக் கெழுவை (partial derivative) முதலிரு வரிசைகள் (of first and second order) உடையதாய் இருந்து, லாப்லஸ் சமன் பாடான

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0$$

என்பதற்கிணங்க இருந்தால், அதனை இசைச்சார்பு என்போம்.

2·18 இணை இசைச்சார்புகள்

இப்பொழுது, $f(z) = w = u + iv$ ஒரு பகுமுறைச் சார்பானால் u, v என்பன தனித்தனியே இசைச்சார்புகளாகும். ஏனெனில், காஷி, ரைமன் சமன்பாடுகள்படி

$$u_x = v_y; \quad u_y = -v_x$$

$$\therefore \quad u_{xx} = v_{xy}; \; u_{yy} = -v_{yx}$$

v_x, v_y முதலியன தொடர்ச்சியானவை.

$$\therefore v_{xy} = v_{yx}$$

$$\therefore u_{xx} + u_{yy} = 0$$

இதே விதமாக $v_{xx} + v_{yy} = 0$.

u, v ஆகியவற்றை இணை இசைச் சார்புகள் என்போம்.

2·19. $f(z) = w = u + iv$ ஒரு பகுமுறைச் சார்பு ஆனால், $u =$ மாறிலி, $v =$ மாறிலி என்ற வளை வரைகள் ஆர்கன் தளத்தில் ஒன்றையொன்று செங்குத்தாக வெட்டிக் கொள்கின்றன என நிரூபி.

$u(x, y) = c$ ஆக இருக்கட்டும்.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{u_x}{u_y} = m \text{ ஆக இருக்கட்டும்.}$$

$v(x, y) = c'$ ஆனால் $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{v_x}{v_y} = m'$ என்க.

இப்பொழுது $mm' = \dfrac{u_x v_x}{u_y v_y} = -1$

(ஏனெனில் $u_x = v_y,\; u_y = -v_x$)

எனவே, இவை செங்குத்தாக வெட்டிக் கொள்கின்றன.

2·20. பகுமுறைச் சார்பைக் கண்டு பிடித்தல்— I

$u = e^{-x}(x \sin y - y \cos y)$ என இருக்கும்படி $w = u + iv$ என்ற பகுமுறைச் சார்பைக் கண்டு பிடி.

முதலாவதாக, u ஒரு இசைச்சார்பு என்பதைக் கவனி, அதாவது $u_{xx} + u_{yy} = 0$ என்பதைச் சரிபார்.

இப்பொழுது, காஷி ரைமன் சமன்பாடுகளின் படி,

$$u_x = e^{-x} \sin y - x e^{-x} \sin y + y e^{-x} \cos y = v_y \quad \ldots (1)$$

$$u_y = -e^{-x} \cos y + x e^{-x} \cos y + y e^{-x} \sin y = -v_x \ldots (2)$$

(1)ல் உள்ள v_yஐ yஐப் பொறுத்து — xஐ மாறிலியாகக் கொண்டு — தொகையிடு செய்வோம்.

$$v = y e^{-x} \sin y + x e^{-x} \cos y + F(x)$$

இதில் $F(x)$ என்பது xஐ மாறியாகக் கொண்ட மெய்யான சார்பு.

$$\therefore v_x = -y e^{-x} \sin y + \cos y \,(e^{-x} - x e^{-x}) + F'(x) \ldots (3)$$

$(2) + (3)$. $0 = F'(x)$. $\therefore F(x) = c$

$$\therefore v = e^{-x} (y \sin y + x \cos y) + c.$$

$$\therefore u + iv = e^{-x} \sin y \,(x + iy) + i e^{-x} \cos y \,(x + iy) + ic$$

$$= e^{-x} (x + iy)\, i (\cos y - i \sin y) + ic.$$

$$= i e^{-x - iy} (x + iy) + ic$$

$$= i z e^{-z} + ic.$$

வேறுமுறை:

$$u_x = e^{-x} \sin y - x e^{-x} \sin y + y e^{-x} \cos y$$

$$u_y = -e^{-x} \cos y + x e^{-x} \cos y + y e^{-x} \sin y$$

$$f'(z) = u_x - i u_y$$

$$= e^{-x} (\sin y + i \cos y) - x e^{-x} (\sin y + i \cos y)$$

$$+ y e^{-x} (\cos y - i \sin y)$$

$$= e^{-x}\, i\,(\cos y - i \sin y) - i\, x\, e^{-x} (\cos y - i \sin y)$$

$$+ y\, e^{-x} (\cos y - i \sin y)$$

$$= (\cos y - i \sin y) e^{-x} (i - i\,x + y)$$

$$= e^{-iy}\, e^{-x}\, [i - i\,(x + i\,y)]$$

$$= e^{-(x+iy)}\, [i - i\,(x + iy)]$$

$$= e^{-z}\, i\,(1 - z)$$

$$\therefore\ f(z) = i\,(z e^{-z} + c)$$

2·21 பகுமுறைச் சார்பைக் காணல் — II

$u_1 (x, y) = \dfrac{\partial u}{\partial x}$; $u_2 (x, y) = \dfrac{\partial u}{\partial y}$ ஆனால் $f'(z) = u_1 (z, 0) - i\, u_2 (z, 0)$ என நிரூபி

$$f'(z) = \frac{dw}{dz} = \frac{\delta w}{\delta x} = u_x + i v_x$$

$$f'(z) = u_x - i\, u_y \qquad \because\ v_x = -u_y.$$

$$f'(z) = u_1 (x, y) - i\, u_2 (x, y)$$

இதில் $y = 0$ போடு. $f'(x) = u_1 (z, 0) - i u_2 (x, 0)$

இதில் $x = z$ போடு. $f'(z) = u_1 (z, 0) - i\, u_2 (z, 0)$ ...... (1)

மாதிரி: (i) $u = x^3 - 3xy^2$ ஆக உள்ள பகுமுறைச் சார்பைக் காண்க

$$u_1 = 3x^2 - 3y^2 \quad \therefore\ u_1 (z, 0) = 3z^2$$

$$u_2 = -6xy \quad \therefore\ u_2 (z, 0) = 0$$

(1) ல் இருந்து $f'(z) = 3z^2 - i.\,0$

$$\therefore f(z) = z^3 + c$$

மாதிரி (ii) $u-v = (x-y)(x^2+4xy+y^2)$ என உள்ள பகு முறைச் சார்பைக் கண்டுபிடி.

$$f(z) = u+iv. \quad \therefore\ if(z) = iu-v$$

$$\therefore\ (1+i)f(z) = (u-v) + i(u+v)$$

$= U+iV$ ஆக இருக்கட்டும்,

இதில் $U = x^3+3x^2y-3xy^2-y^3$ என தரப்பட்டுள்ளது.

$$\therefore\ U_1 = 3x^2+6xy-3y^2 \qquad \therefore\ U_1(z,0) = 3z^2$$

$$U_2 = 3y^2-6xy+3x^2 \qquad \therefore\ U_2(z,0) = 3z^2$$

(1)-ல் இருந்து $(1+i)f'(z) = U_1(z,0) - iU_2(z,0)$

$$= 3z^2 - i3z^2$$

$$= 3(1-i)z^2$$

$$\therefore\ f(z) = \frac{1-i}{1+i}z^3 + c$$

$$f(z) = -\frac{2i}{2}z^3+c = -iz^3+c.$$

மாதிரி (iii) $u+v = \dfrac{\sin 2x}{\cosh 2y - \cos 2x}$ ஆனால் $f(z) = u+iv$ என்ற பகுமுறைச் சார்பைக் கண்டுபிடி.

$$f(z) = u+iv;\ if(z) = iu-v$$

$$(1-i)f(z) = u+v+i(v-u)$$

$= U+iV$ என இருக்கட்டும்.

$$U_1 = \frac{(\cosh 2y - \cos 2x)\,2\cos 2x - 2\sin^2 2x}{(\cosh 2y - \cos 2x)^2}$$

$$= \frac{2\cosh 2y\cos 2x - 2}{(\cosh 2y - \cos 2x)^2}$$

$$U_1(z,0) = \frac{2\cos 2z - 2}{(1-\cos 2z)^2} = \frac{-2}{1-\cos 2z}$$

$$= -\operatorname{cosec}^2 z.$$

$$U_2 = \frac{-\sin 2x . 2 \sinh 2y}{(\cosh 2y - \cos 2x)^2}$$

$U_2 (z,0) = 0.$

இப்பொழுது, $(1-i) f'(z) = U_1(z,0) - i U_2 (z,0)$

$$= - \operatorname{cosec}^2 z$$

$$\therefore f(z) = \frac{\cot z}{1-i} + c$$

$$= \frac{1+i}{2} \cot z + c.$$

2·22. பகுமுறைச் சார்பைக் காணல்—III

இம்முறையில் பொருத்தமான (exact) வகைக்கெழுவின் தொகையீட்டைக் காணும் முறையைப் பயன் படுத்துகிறோம்.

மாதிரி: $u = e^{-x} \{ (x^2-y^2) \cos y + 2xy \sin y \}$

ஆனால் $u + iv$ என்ற பகுமுறைச் சார்பைக் கண்டுபிடி.

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy$$

$$= - u_y \, dx + u_x dy \; (\because u_x = v_y, v_x = -u_y$$

$= Mdx + Ndy$ எனக் கொள்க.

இப்பொழுது, வலப்பக்கம் ஒரு பொருத்தமான (exact) வகைக் கெழு.

$\therefore \quad M_y = -u_{yy}$

$= u_{xx}$, ஏனெனில் u ஒரு இசைச் சார்பு.

$= N_x$

$\therefore \quad v = \int$($y$ஐ மாறிலியாகக் கொண்ட $-u_y$) dx

$+ \int$ (u_x-ல் x இல்லாத உறுப்புகள் மட்டும்) dy

இப்பொழுது, $u_x = e^{-x} \{\cos y . 2x + 2y \sin y\}$

$$- e^{-x} \{(x^2-y^2) \cos y + 2xy \sin y\}.$$

இதில் x இல்லாத உறுப்பு 0. மேலும்,

$$-u_y = -e^{-x}\{-\sin y\,(x^2-y^2) - 2y\cos y + 2x\,(y\cos y + \sin y)\}.$$

Access

$$v = \int e^{-x}\{x^2\sin y - 2x\,(y\cos y + \sin y) - y^2\sin y + 2y\cos y\}\,dx + \int 0\,dy$$

$$v = -e^{-x}(x^2+2x+2)\sin y$$

$$+2e^{-x}(x+1)(y\cos y + \sin y)$$

$$+e^{-x}(y^2\sin y - 2y\cos y)$$

$$= e^{-x}\{2xy\cos y - (x^2-y^2)\sin y\}$$

$$\therefore\ u+iv = e^{-x}(x^2-y^2)(\cos y - i\sin y)$$

$$+\ e^{-x}\,2ixy\,(\cos y - i\sin y)$$

$$= e^{-x-iy}(x^2-y^2+2ixy)$$

$$f(z) = u+iv = e^{-z}\cdot z^2$$

2·23. துருவ ஆயத்தொலை வடிவில் காஷி, ரைமன் சமன்பாடுகள்.

$x = r\cos\theta;\quad y = r\sin\theta.$ ஆகையால்

$$x^2+y^2 = r^2;\quad \theta = \tan^{-1} y/x$$

$$2x = 2r\frac{\partial r}{\partial x};\ \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos\theta.$$

இதேவிதமாக, $\dfrac{\partial r}{\partial y} = \dfrac{y}{r} = \sin\theta$

இனி, $\dfrac{\partial\theta}{\partial x} = \dfrac{1}{1+(y^2/x^2)}\cdot\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)$

$$= -\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{-\sin\theta}{r}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{1}{1+(y^2/x^2)}\cdot\frac{1}{x}=\frac{\cos\theta}{r}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial x}$$

i.e., $u_x=u_r\cos\theta-u_\theta\dfrac{\sin\theta}{r}$

இதே விதமாக, $u_y=u_r\sin\theta+u_\theta\dfrac{\cos\theta}{r}$

$$v_x=v_r\cos\theta-v_\theta\frac{\sin\theta}{r}$$

$$v_y=v_r\sin\theta+v_\theta\frac{\cos\theta}{r}$$

ஆனால் $u_x=v_y$: $u_y=-v_x$ ... காஷி, ரைமன்

$$\therefore\quad u_r\cos\theta-u_\theta\frac{\sin\theta}{r}=v_r\sin\theta+v_\theta\frac{\cos\theta}{r}\quad\ldots(A)$$

$$u_r\sin\theta+u_\theta\frac{\cos\theta}{r}=-v_r\cos\theta+v_\theta\frac{\sin\theta}{r}\quad\ldots(B)$$

$(A)\times\cos\theta+(B)\times\sin\theta.\quad u_r=\dfrac{1}{r}\cdot v_\theta\quad\ldots(1)$

$(B)\times\cos\theta-(A)\times\sin\theta.\quad\dfrac{1}{r}\cdot u_\theta=-v_r\quad\ldots(2)$

(1), (2) என்பன காஷி, ரைமன் சமன்பாடுகளின் துருவ ஆயத் தொலை வடிவமாகும்.

இனி w-ன் வகைக் கெழுவை துருவ ஆயத் தொலை வடிவில் காண்போம்.

$$\frac{dw}{dz}=\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial x}$$

$$=w_r\cos\theta-(u_\theta+iv_\theta)\frac{\sin\theta}{r}$$

$$=w_r\cos\theta-(-rv_r+iru_r)\frac{\sin\theta}{r}$$

$$=w_r\cos\theta-i(u_r+iv_r)\sin\theta$$

$$=w_r(\cos\theta-i\sin\theta).$$

வேறு முறை : $f(z) = u(r,\theta)+i\,v(r,\theta)$ ஆனால்

$$f'(z) = \underset{\Delta z\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{u(r+\Delta r,\ \theta+\Delta\theta) + iv(r+\Delta r,\ \theta+\Delta\theta) - u(r,\theta) - iv(r,\theta)}{\Delta z}$$

இங்கு $\Delta z = (r+\Delta r)\,e^{i(\theta+\Delta\theta)} - re^{i\theta}$ ஆகும்.

Δz எவ்வழியிலும் பூச்சியத்தை அணுகலாம். ஆகையால், r-ஐ மாறிலியாகக் கொள்வோம். $\therefore$ $\Delta r=0$; மேலும் $\Delta\theta\to 0$.

$$\therefore\ f'(z) = \underset{\Delta\theta\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{u(r,\theta+\Delta\theta) + iv(r,\theta+\Delta\theta) - u(r,\theta) - iv(r,\theta)}{re^{i(\theta+\Delta\theta)} - re^{i\theta}}$$

$$= \frac{1}{re^{i\theta}} \underset{\Delta\theta\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{u(r,\theta+\Delta\theta) - u(r,\theta) + iv(r,\theta+\Delta\theta) - iv(r,\theta)}{e^{i\Delta\theta}-1}$$

$$= \frac{1}{re^{i\theta}} \underset{\Delta\theta\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{u(r,\theta+\Delta\theta) - u(r,\theta) + iv(r,\theta+\Delta\theta) - iv(r,\theta)}{\cos\Delta\theta + i\sin\Delta\theta - 1}$$

$$= \frac{1}{re^{i\theta}} \underset{\Delta\theta\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{u(r,\theta+\Delta\theta) - u(r,\theta) + iv(r,\theta+\Delta\theta) - iv(r,\theta)}{i\Delta\theta}$$

$$= \frac{1}{ire^{i\theta}}\,[u_\theta + iv_\theta] \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

இப்பொழுது θ ஐ மாறிலியாகக் கொள்வோம். எனவே $\Delta\theta=0$, மேலும், $\Delta r\to 0$.

$$\therefore\ f'(z) = \underset{\Delta r\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{u(r+\Delta r,\theta) + iv(r+\Delta r,\theta) - u(r,\theta) - i\,v(r,\theta)}{(r+\Delta r)\,e^{i\theta} - re^{i\theta}}$$

$$= \frac{1}{e^{i\theta}} \underset{\Delta r\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{u(r+\Delta r,\theta) + iv(r+\Delta r,\theta) - u(r,\theta) - iv(r,\theta)}{r+\Delta r - r}$$

$$= \frac{1}{e^{i\theta}} \text{ எல்லை}_{\Delta r \to 0} \frac{u(r+\Delta r,\theta)-u(r,\theta)+i\{v(r+\Delta r,\theta)-(r,\theta)\}}{\Delta r}$$

$$= \frac{1}{e^{i\theta}} [u_r+iv_r] \text{ .... (2)}$$

(1), (2) ல் உள்ள $f'(z)$-ன் மதிப்புகள் சமமாகும். ஏனெனில் $f'(z)$ மாறுததாகும்.

$$\therefore \frac{1}{ire^{i\theta}}[u_\theta + iv_\theta] = \frac{1}{e^{i\theta}} [u_r + iv_r]$$

i.e. $u_\theta + iv_\theta = iru_r - rv_r$.

$$\therefore u_r = \frac{1}{r} v_\theta \text{ ; } \frac{1}{r} . u_\theta = - v_r.$$

2.34 x, y **என்பவற்றை** $z, \bar{z}$ **என்ற சாராத (independent) மாறிகளின் சார்புகளாக மாற்றல்.**

$$z = x+iy \quad \therefore \quad \bar{z} = x-iy$$

எனவே, $x = \dfrac{\bar{z} + z}{2}$, $y = \dfrac{i}{2} (\bar{z} - z)$

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \tfrac{1}{2} = \frac{\partial x}{\partial \bar{z}}$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{i}{2} = - \frac{\partial y}{\partial \bar{z}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x} . \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y} . \frac{\partial y}{\partial z} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y}\right) f$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}\right) f$$

$$\therefore \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial z} . \frac{\partial}{\partial \bar{z}} . f = \tfrac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y}\right) . \tfrac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}\right) f$$

$$\therefore 4 \frac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial \bar{z}} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

மாதிரி: $f(z) = u+iv$ ஒரு பகுமுறைச் சார்பானால்

$$\frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^2}{\partial y^2} = 2\,|\,f'(z)\,|^2$$ என நிருபி.

$$\frac{\partial u^2}{\partial x} = 2u\,\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} = 2u\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$$

இதே விதமாக $\dfrac{\partial^2 u^2}{\partial y^2} = 2u\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2$

$$\therefore\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2\left\{ u_x^{\,2} + u_y^{\,2} + u\,(u_{xx} + u_{yy}) \right\}$$

$$= 2\,(u_x^{\,2} + u_y^{\,2}) \quad \ldots \because \quad u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$= 2\,(u_x^{\,2} + v_x^{\,2}) \quad \ldots \because \quad v_x = -u_y$$

$$= 2\,|\,f'(z)\,|^2$$

ஏனெனில் $f'(z) = \dfrac{\partial w}{\partial x} = u_x + i\,v_x$

மாதிரிக் கணக்குகள்

மாதிரி 1: $|\,z\,| < 1$ என்ற அரங்கில் $f(z) = z^2$ ஒரு சீரான தொடர்புடைச் சார்பு என நிருபி.

z_0 என்பது எந்தப் புள்ளியாக இருந்தாலும், கொடுக்கப்பட்ட ε-க்கு ஏற்ப

$$|\,z - z_0\,| < \delta \text{ ஆனால், } |\,z^2 - z_0^2\,| < \varepsilon$$

என்றவாறு இருக்குப்படி δ ஐக் கண்டுபிடிக்க முடியும் என நிருபிக்க வேண்டும்.

z, z_0 என்பவை $|\,z\,| < 1$ என்ற அரங்கில் இருக்கட்டும். அப்படியானால்

$$|\,z^2 - z_0^2\,| = |\,z + z_0\,|\ |\,z - z_0\,|$$

$$\leq \{\,|\,z\,| + |\,z_0\,|\,\}\ |\,z - z_0\,|$$

z, z_0 என்பவை $|\,z\,| < 1$ என்ற அரங்கில் உள்ளவை.

எனவே, $|z|<1$; $|z_0|<1$ $\therefore$ $|z|+|z_0|<2$

ஆகையால், $|z^2-z_0^2|<2\ |z-z_0|$

$\therefore$ $|z-z_0|<\delta$ ஆனால், $|z^2-z_0^2|<2\delta$

இப்போது, $\delta=\varepsilon/2$ எனக்கொண்டால், நிருபணம் பூரணமாகிறது. δஆனது ε ஐ மட்டும் பொறுத்தது; z_0 ஐப் பொறுத்ததல்ல என்பதைக் கவனி.

மாதிரி: 2 $f(z)=\bar{z}$ பகுமுறைச் சார்பல்ல என நிரூபி.

நிருபணம்:

$$f(z)=\bar{z}=x-iy$$

$$\therefore\ u=x;\ v=-y$$

$$\therefore\ \frac{\partial u}{\partial x}=1 \text{ ஆனால் } \frac{\partial v}{\partial y}=-1$$

$$\therefore\ \frac{\partial u}{\partial x}\neq\frac{\partial v}{\partial y}$$

இது காஷி-ரைமன் சமன்பாடுகளுக்கு முரணானது.

$\therefore$ $\bar{z}$ பகுமுறைச் சார்பல்ல.

மாதிரி 3:

$$f(z)=\begin{cases} e^{-z^{-4}} & \ldots\ z\neq 0 \\ 0 & \ldots\ z=0 \end{cases}$$

என்பது $z=0$-ல் பகுமுறைச் சார்பல்ல என நிரூபி.

$$f'(0)=\underset{z\to 0}{\text{எல்லை}}\ \frac{e^{-z^{-4}}-0}{z-0}$$

$z=re^{i\pi/4}$ எனக் கொள்க.

$$f'(0)=\underset{r\to 0}{\text{எல்லை}}\ \frac{\exp(-r^{-4}e^{-i\pi})}{re^{i\pi/4}}$$

$$=\underset{r\to 0}{\text{எல்லை}}\ \frac{e^{r^{-4}}}{re^{i\pi/4}}\longrightarrow\infty$$

$\therefore$ $f'(0)$ இல்லை என்பது தெளிவு.

குறிப்பு: ஆனாலும், $z=0$-ல் காஷி ரைமன் சமன்பாடுகள் சரியாக உள்ளன என்பதைச் செய்து பார்.

மாதிரி 4: $f(z) = \dfrac{x^3 y(y-ix)}{x^6+y^2}$ $\qquad z \neq 0$

$= 0, \qquad z = 0$

ஆனால், ஆரைத் திசையின் வழியே $z \to 0$ ஆகும்போது

$\dfrac{f(z)-f(0)}{z} \to 0$ என்றும், $y = x^3$ வழியே $z \to 0$

ஆகும்போது $\dfrac{f(z)-f(0)}{z} \to -\dfrac{i}{2}$ என்றும் நிருபி.

குறிப்பு: இதிலிருந்து $z=0$-ல் $f(z)$ பகுமுறைச் சார்பல்ல என்பது தெளிவு. ஆனாலும், காஷி ரைமன் சமன்பாடுகள் சரியாக உள்ளன என்பதைச் செய்து பார்.

நிருபணம்:

$y = mx$ வழியே, $z \to 0$ எனக் கொள்க

$$\lim_{z\to 0} \frac{f(z)-f(0)}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{x^3 y(y-ix)}{(x^6+y^2)(x+iy)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^3\, mx(mx-ix)}{(x^6+m^2x^2)(x+imx)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{m(m-i)x^2}{(m^2+x^4)(1+im)} = 0 \qquad \ldots \text{(i)}$$

$y = x^3$ வழியே, $z \to 0$ எனக் கொள்க.

$$\lim_{z\to 0} \frac{f(z)-f(0)}{z-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^6(x^3-ix)-0}{(x^6+x^6)(x+ix^3)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{2}\frac{(x^2-i)}{(1+ix^2)} = -\frac{i}{2} \ldots \text{(ii)}$$

மாதிரி 5: ஒரு பகுமுறைச் சார்பின் மட்டு மாறிலியானால் அச்சார்பு ஒரு மாறிலி என நிறுவுக.

$f(z) = w = u + iv$ ஆக இருக்கட்டும்.

$|w| = c$ எனக் கொள்வோம்.

$\therefore \; u^2 + v^2 = c^2$

$\therefore \; 2uu_x + 2vv_x = 0 \qquad \ldots \text{(I)}$

இதே விதமாக, $2uu_y + 2vv_y = 0$ ... (2)

ஆனால், இது ஒரு பகுமுறைச் சார்பு. $\therefore u_x = v_y, v_x = -u_y$

$\therefore$ (1)ல் இருந்து. $uu_x - vu_y = 0$ ... (3)

(2)ல் ,, $uu_y + vu_x = 0$ ... (4)

$(3)\times u + (4)\times v.$ $(u^2+v^2)u_x = 0$

$\therefore u_x=0$... (5), ஏனெனில் $u^2+v^2=c^2 \neq 0.$

$(4)\times u - (3)\times v.$ $(u^2+v^2)u_y = 0.$

$\therefore u_y = 0$ ... (6)

(5), (6)ல் இருந்து $u=$ மாறிலி என்று தெரிகிறது. இதே விதமாக $v=$ மாறிலி என நிரூபிக்க முடியும்

$\therefore u+iv = w = f(z) =$ மாறிலி.

பயிற்சி 2

1. (i) $f(z) = z^2$ ஆனால் $\underset{z\to a}{\text{எல்லை}} f(z) = a^2$ என நிரூபி.

(ii) $f(z) = \begin{cases} z^2 & .. \ z\neq a \\ 0 & ... \ z=a \end{cases}$ ஆனால் $\underset{z\to a}{\text{எல்லை}} f(z)$ ஐக் கண்டு பிடி. $z = a$ல் தொடர்ச்சி உள்ளதா?

2. $\underset{z\to a}{\text{எல்லை}} f(z)$ இருந்தால், அது ஒரே எல்லை என நிரூபி.

3. $|z| < 1$ என்ற அரங்கத்தில் $f(z) = z + z^2$ ஒரே சீரான தொடர்ச்சி உள்ளது என நிரூபி.

4. $|z| < 1$ என்ற அரங்கத்தில் $f(z) = 1/z^2$ ஒரே சீரான தொடர்ச்சி உள்ளதல்ல என நிரூபி.

5. $f(z) = xy + iy$ என்பது எல்லாவிடத்திலும் தொடர்புடைச் சார்பாக இருந்தாலும், பகுமுறைச் சார்பல்ல என நிரூபி.

6. $f(z) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$ என்பது தொடர்புடைச் சார்பு என்றும், பகுமுறைச் சார்பு என்றும் நிரூபி.

7. $u = x^2 - y^2$, $v = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$ ஆனால் u, v என்பன இசைச் சார்புகள் என நிரூபி. $u + iv$ பகுமுறைச் சார்பல்ல என நிரூபி.

8. $f(z) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y^5 (x+iy)}{x^4+y^{10}} & \ldots z \neq 0 \\ 0 & \ldots z = 0 \end{cases}$

என்ற சார்பில் $y = x$ வழியாகவும், $y = x^{2/5}$ வழியாகவும் $z \to 0$ ஆகும்போது $f'(0)$ன் மதிப்பைக் கண்டுபிடித்து $f(z)$ ஆனது $z = 0$ல் பகுமுறைச் சார்பல்ல என நிருபி.

9. $f(z) = \begin{cases} \dfrac{xy^2 (x+iy)}{x^2+y^4} & \ldots z \neq 0 \\ 0 & \ldots z = 0 \end{cases}$

என்ற சார்பு $z = 0$ல் பகுமுறைச் சார்பல்ல என நிருபி.

10. பின் வரும் சார்புகள் $z=0$ல் காஷி, ரைமன் சமன்பாடுகளுக்கு உடன்பட்டிருக்கின்றன என்றும், ஆனாலும் அவை பகுமுறைச் சார்புகள் அல்ல என்றும் நிருபி.

(i) $f(z) = \sqrt{|xy|}$

(ii) $f(z) = \begin{cases} \dfrac{x^3 (1+i) - y^3 (1-i)}{x^2+y^2} & \ldots z \neq 0 \\ 0 & \ldots z = 0. \end{cases}$

11. பின் வருவனவற்றில் $w = u + iv$ என்ற சார்பு எந்த இடங்களில் பகுமுறைச் சார்பு அல்ல என்று கண்டு பிடி.

(i) $\sinh u \cos v + i \cosh u \sin v$ ... $(z = \pm i)$

(ii) $z = e^{-v} (\cos u + i \sin u)$ ... $(z = 0)$

(iii) $e^{x} (\cos y + i \sin y)$ ... $(z = \infty)$

(iv) $z = \log \rho + i\, \phi$
$w = \rho (\cos \phi + i \sin \phi)$ ... $(z = \infty)$.

12. $f(z) = u + iv$ என்ற பகுமுறைச் சார்பைக் கண்டுபிடி.

(i) $u = e^{x} (x \cos y - y \sin y)$ ... விடை ze^{z}.

(ii) $u = e^{-x} (x \sin y - y \cos y)$ ... விடை ize^{-z}.

(iii) $u = (x-1)^3 - xy^2 + 3y^2$

விடை. $u + iv$. இதில் $v = x^2 y - 6xy - (y^3/3)$

(iv) $u=\frac{\sin 2x}{\cosh 2y+\cos 2x}$ ...விடை. $\tan z$.

(v) $u-v=e^x(\cos y-\sin y)$ ... விடை e^z

(vi) $u-v=\frac{e^y-\cos x+\sin x}{\cos y-\cos x}$; $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3-i}{2}$

விடை. $\cot(z/2)+(1-i)/2$

(vii) $u=x^3-3xy^2+3x^2-3y^2+1$ ... விடை $z^3+3z+1+c$.

(viii) $u=\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$ ... விடை. $-iz^3$

(ix) $u-v=\frac{\cos x+\sin x-e^{-y}}{2\cos x-e^{-y}-e^y}$; $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

விடை. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cot(z/2)$

(x) $u=\sin x\cosh y+2\cos x\sinh y+x^2-y^2+4xy$.

விடை. $(1-2i)\ (\sin z+z^2)$

13. u என்பது x, y என்ற மாறிகளில் m படியுள்ள சமபடித் தான சார்பு ஆனால், ஆய்லர் தேற்றத்தின் படி

$$x u_x+y u_y=mu \quad \ldots (1)$$

என்பது நமக்குத் தெரியும். u ஆனது லாப்லஸ் சமன் பாட்டுக் கிணங்க இருந்தால் $f(z)=u+\frac{i}{m}(yu_x-xu_y)$ ஒருபகுமுறைச் சமன்பாடு என நிரூபி.

$$v=\frac{1}{m}(yu_x-xu_y)$$

$$v_x=\frac{1}{m}(yu_{xx}-u_y-xu_{yx})$$

$$v_y=\frac{1}{m}(yu_{xy}+u_x-xu_{yy})$$

இப்பொழுது, $u_x=v_y$ என நிரூபிப்போம்.

i.e. $mu_x=yu_{xy}+u_x-xu_{yy}$ என நிரூபிக்கவேண்டும்.

ஆனால் $u_{xx}=-u_{yy}$, லாப்லஸ் சமன்பாடு.

$\therefore$ $mu_x=y\,u_{xy}+u_x+x\,u_{xx}$ என நிரூபித்தால் போதுமானது. இது (1)ல் இருந்து தெளிவாகத் தெரிகிறது.

இதே மாதிரி $u_y = -v_x$ என நிரூபிக்கலாம்.

மேலும் லாப்லஸ் சமன்பாட்டுக்கிணங்க இருப்பதால்,

u_x, u_y, v_x, v_y என்பன தொடர்புடைச்சார்புகள்.

$\therefore$ $u+iv$ ஒரு பகுமுறைச் சார்பு.

மேற்கண்டதை உபயோகித்தோ (அன்றி வேறு முறையிலோ) $u+iv$ என்ற பகுமுறைச் சார்பைக் கண்டுபிடி.

(i) $u = x^3 - 3xy^2$ ...... விடை z^3

(ii) $v = y/(x^2+y^2)$ ...... விடை $-1/z$.

(iii) $u = ax^2 + 2bxy - ay^2$ ... விடை $(a-ib)z^2$

(iv) $xy/(x^4+y^4)$ ..... விடை u இசைச்சார்பல்ல.

14. பின் வருவனவற்றை நிரூபி :—

(i) $\dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial z} + \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$

(ii) $\dfrac{\partial}{\partial y} = i\left\{\dfrac{\partial}{\partial z} - \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}\right\}$

(iii) $\nabla = \dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y} = 2\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$

(iv) $\overline{\nabla} = \dfrac{\partial}{\partial x} - i\dfrac{\partial}{\partial y} = 2\dfrac{\partial}{\partial z}$

(v) $B(z,\bar{z}) = P(x,y) + i\,Q(x,y)$ ஆனால்

$P_x - Q_y + i(Q_x + P_y) = 2B_{\bar{z}}$

(vi) $R = \log|f'(z)|$ ஆனால் $R_{xx} + R_{yy} = 0$

(vii) $R = |f(z)|^2$ ஆனால் $R_{xx} + R_{yy} = 4|f'(z)|^2$

15. $f(z) = \sin z = u + iv$; c, c' என்பன மெய் மாறிலிகள் ஆனால், $u=c$, $v=c'$ என்ற வளைவரைகள் z—தளத்தில் செங்குத்தாய் வெட்டிக்கொள்ளும் என நிறுவுக.

16. $u \equiv e^{-x}(x\cos y + y\sin y) = c$ என்ற வளைவரை, செங்குத்தாக வெட்டும் வளைவரைகளின் பொது ரூபம் யாது?

விடை $e^{-x}(x\sin y - y\cos y) = c$.

17. $u+iv$ ஒரு பகுமுறைச் சார்பானுல், u, v என்பவை $\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் என நிரூபி.

$$v_\theta = r.\ u_r\ ;\ rv_r = -u_\theta$$

$$\therefore v_{r\theta} = ru_{rr} + u_r\ ;\ v_{\theta r} = -u_{\theta\theta}/r$$

ஆனுல் $v_{r\theta} = v_{\theta r}$ ... ஏன்?

$$\therefore r^2u_{rr} + r\,u_r + u_{\theta\theta} = 0.$$

இதே விதமாக, $r^2 v_{rr} + r\,v_r + v_{\theta\theta} = 0$.

இவை, லாப்லஸ் சமன்பாட்டின் துருவ ஆயத்தொலை வடிவம்.

18. பின் வருவன இசைச் சார்புகள் என நிரூபி. அதன் இணை இசைச் சார்பையும், அவைதரும் பகுமுறைச் சார்பையும் கண்டுபிடி.

(i) $2x(1-y)$ ...... விடை $2y+x^2-y^2;\ 2z+iz^2$

(ii) $x^2-y^2-2xy-2x+3y$...விடை $x^2-y^2+2xy-3x-2y$

(iii) $3x^2y+2x^2-2y^2-y^3$ ... விடை $2z^2-iz^3$

(iv) $xe^x\cos y - ye^x\sin y$ ...... விடை ze^z

(v) $e^{-2xy}\sin(x^2-y^2)$ ... விடை $-ie^{iz^2}$

3. அடுக்குத் தொடர்

3·1 தொடரின் எல்லை

$u_1(z), u_2(z), \ldots u_n(z), \ldots$ என்ற தொடரை $\{u_n(z)\}$ எனக் குறிப்பிடுவது வழக்கம். ஒரு ε கொடுக்கப்பட்டால், $n > N$ ஆக இருக்கும்போது, $|u_n(z) - u(z)| < \varepsilon$ என இருக்கும்படி N ஐக் கண்டுபிடிக்க முடியுமானல் $u(z)$ ஐ $u_n(z)$-ன் எல்லை என்று சொல்வோம். இதனை,

$$\underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \; u_n(z) = u(z) \text{ என எழுதுவோம்.}$$

3·2. தொடரின் தொகையின் எல்லை

$$S_1(z) = u_1(z)$$

$$S_2(z) = u_1(z) + u_2(z)$$

....

$$S_n(z) = u_1(z) + u_2(z) + \ldots + u_n(z)$$

ஆனல் $S_n(z)$ ஐ n ஆவது தொகை எனலாம். இப்பொழுது, $\{S_n(z)\}$ ஒரு தொடர் என்பது தெளிவு. எனவே,

$$\underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \; S_n(z) = S(z) \text{ ஆனல் } \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$$

என்பது ஒருங்கல் அடையும் தொடர் அல்லது ஒருங்கல் தொடர் என்று சொல்வோம். இல்லாவிடில் $\Sigma\, u_n(z)$ ஒரு விரிதொடர் ஆகும்.

3·3. அடுக்குத்தொடர்

$a_0, a_1, a_2, \ldots$ என்பவை கலப்பெண்களாகவும், z ஒரு கலப்பெண் மாறியாகவும் இருந்தால் $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ ஐ

அடுக்குத் தொடர் என்போம். இதில் $z = \zeta + a$ ஆனல் இது $\Sigma a_n \zeta^n$ ஆகும். எனவே அடுக்குத் தொடரின் நியம வடிவமாக

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

என்பதைக் கொள்வோம். Σ-வில் n-ன் எல்லைகளைக் குறிப்பிடா விட்டாலும், n ஆனது 0-விலிருந்து ∞ வரை மாறுகிறது எனக் கொள்க.

3·4. அடுக்குத் தொடரின் அறவொருங்கல்

$\Sigma | a_n | \; | z |^n$ ஆனது ஒரு ஒருங்கல் தொடராயிருந்தால், $\Sigma a_n z^n$ ஐ ஒரு அறவொருங்கல் தொடர் என்போம்.

ஆனல், $\Sigma | a_n | \; | z |^n$-ன் உறுப்புகள் மெய்யானவை. ஆகையால், மெய்மாறிகளின் பகு இயலில் பயின்ற காஷியின் மூலசோதனை மூலம்,

$$\text{எல்லை}_{n \to \infty} \; | a_n |^{1/n} \; | z | < 1 \qquad \dots (1)$$

அல்லது, டி-லாம்பர்ட் விகித சோதனைப்படி

$$\text{எல்லை}_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \; | z | < 1 \qquad \dots (2)$$

ஆக இருந்தால், $\Sigma | a_n | \; | z |^n$ என்பது ஒருங்கல் தொடராகவும், $\Sigma a_n z^n$ ஒரு அறவொருங்கல் தொடராகவும் இருக்கவேண்டும் என அறிவோம்.

இப்பொழுது,

$$\text{எல்லை}_{n \to \infty} \left| a_n \right|^{1/n} = \frac{1}{R} \qquad \dots (\text{i})$$

$$\text{அல்லது} \quad \text{எல்லை}_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{R} \qquad \dots (\text{ii})$$

எனக் கொள்வோமானல் (1), (2)-ல் இருந்து $| z | < R$ ஆனல் அடுக்குத்தொடர் அறவொருங்கல் அடையும் என்றும், $| z | > R$ ஆனல் அடுக்குத் தொடரானது விரிதொடர் என்றும் முடிவு செய்யலாம். $| z | = R$ ஆனல் அடுக்குத் தொடரைக் குறித்து உடனே முடிவு செய்ய இயலாது. தீவிரமாக ஆராய்ந்து தான் முடிவு காண வேண்டும்.

$|z| = R$ என்ற வட்டத்தை ஒருங்கல் வட்டம் என்றும், R ஐ ஒருங்கல் ஆரம் என்றும் அழைப்பது பொருந்தும்.

$$\frac{1}{R} = \underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \left| a_n \right|^{1/n} = \underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

என்பது நினைவிற் கொள்ளத்தக்கது.

3·5 நினைவூட்டுகிறோம்:

(i) Σu_n ஒருங்கல் தொடரானால் $\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}}\ u_n = 0$

(ii) $\Sigma \frac{1}{n^p}$ ஆனது $p > 1$ ஆனால் ஒருங்கல் தொடர்,

$p \leq 1$ ஆனால் விரிதொடர்

(iii) ஒப்பிடும் சோதனை $\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \frac{u_n}{v_n} = k$ ஆனால் Σv_n ஒருங்கல் தொடராயின், Σu_n உம் ஒருங்கல் தொடர். அல்லாமல் Σv_n விரிதொடராயின், Σu_n உம் விரிதொடர்.

(iv) மூல சோதனை. $\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \left| u_n \right|^{1/n} = l$ ஆக இருக்கட்டும்.

$l < 1$ ஆனால் Σu_n ஒருங்கல் தொடர். $l > 1$ ஆனால் Σu_n விரிதொடர். $l = 1$ ஆனால் இச்சோதனையால் பயன் இல்லை.

(v) விகித சோதனை $\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1$ ஆனால் Σu_n ஒருங்கல் தொடர். இவ்வெல்லை > 1 ஆயின் Σu_n விரிதொடர். எல்லை $= 1$ ஆனால் இச்சோதனையால் பயன் இல்லை.

3·6. தேற்றம் 1:

$z = z_0$ ஆக இருக்கும்போது, $\Sigma a_n z^n$ ஒருங்கல் அடைந்தால், $z < z_0$ ஆக இருக்கும்போது $\Sigma a_n z^n$ ஒரு அறவொருங்கல் தொடராகும்.

நிருபணம்:

$\Sigma a_n z_0^n$ ஒருங்கடைவதால், இதன் ஒவ்வொரு உறுப்பும் வரம்புடையதாகும். எனவே,

$$n = 0, 1, 2, \ldots \text{ ஆனால் } |a_n z_0^n| < M.$$

இதில் M என்பது ஒரு மிகையெண். இப்பொழுது,

$|z| < |z_0|$ ... கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$\therefore \frac{|z|}{|z_0|} = k < 1$ ... k ஒரு மிகையெண்.

$\therefore \Sigma Mk^n$ என்ற பெருக்குத் தொடர்,

$k < 1$ ஆனதால் ஒருங்கடையும் என அறிவோம்.

மேலும், $\Sigma Mk^n = \Sigma M \frac{|z|^n}{|z_0|^n}$

$\geq \Sigma |a_n| \; |z|^n$

ஆனல் ΣMk^n ஒரு ஒருங்குத் தொடர்

$\therefore \Sigma a_n z^n$ ஒரு அறவொருங்குத் தொடர்.

3 7. தேற்றம் 2:

$\Sigma a_n z^n$ என்ற அடுக்குத் தொடரின் ஒருங்கல் வட்டம் $|z| = R$ ஆனுல், $\Sigma n a_n z^{n-1}$ என்பதன் ஒருங்கல் வட்டமும் $|z| = R$ ஆக இருக்கவேண்டும்.

நிருபணம்:

$\Sigma a_n z^n$, $\Sigma n a_n z^{n-1}$ என்பவற்றின் ஒருங்கல் ஆரங்கள் முறையே R, R' ஆக இருக்கட்டும்.

$R = R'$ என நிருபிக்கவேண்டும்.

இப்பொழுது, $\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \left| a_n \right|^{1/n} = R$ ... (i)

$\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \left| n a_n \right|^{1/n} = R'$ ... (ii)

அதாவது, $\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} n^{1/n} \cdot \underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \left| a_n \right|^{1/n} = R'$

$\therefore \; 1. \quad R = R'$

குறிப்பு: $\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} n^{1/n} = \underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \frac{n+1}{n} = 1.$

3 8. தேற்றம் 3 :

அடுக்குத் தொடரின் தொகையானது, ஒருங்கல் வட்டத்தினுள் ஒரு பகுமுறைச் சார்பாகும்.

நிரூபணம்:

$f(z) = \Sigma\ a_n z^n$ ஆகவும்,

$g(z) = \Sigma\ na_n z^{n-1}$ ஆகவும் இருக்கட்டும்.

இவற்றின் ஒருங்கல் ஆரங்கள் சமமென அறிவோம் அது R ஆக இருக்கட்டும்.

இப்பொழுது, z ஆனது $|z| = R$ என்ற வட்டத்தின் உள்ளே உள்ள புள்ளி ஆனால், r என்ற மிகையெண்ணை $|z| < r < R$ என்பதற்கிணங்க காண இயலும்.

$\therefore\ \Sigma\ a_n r^n$ உம் ஒரு ஒருங்கல் தொடர்.

$\therefore\ |a_n r^n| < M$

அதாவது, $|a_n| < M/r^n$

இனி, h-ஐ $|z| + |h| < r$ என இருக்கும்படி எடுத்துக் கொள்வோம். $|z| = \rho$ ஆகவும், $|h| = \varepsilon$ ஆகவும் இருக்கட்டும். அப்படியானால்,

$$\left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - g(z) \right|$$

$$= \left| \Sigma a_n \left\{ \frac{(z+h)^n - z^n}{h} - nz^{n-1} \right\} \right|$$

$$= \left| \Sigma a_n \left\{ {}^nC_2 z^{n-2} h + {}_nC_3 z^{n-3} h^2 + \dots + h^{n-1} \right\} \right|$$

$$= \Sigma\ |a_n| \left| \left\{ {}_nC_2 \rho^{n-2} \varepsilon + nC_3 \rho^{n-3} \varepsilon^2 + \varepsilon^{n-1} \right\} \right.$$

$$= \Sigma\ \frac{M}{r^n} \left\{ \frac{(\rho+\varepsilon)^n - \rho^n}{\varepsilon} - n\rho^{n-1} \right\}$$

$$= \frac{M}{\varepsilon} \Sigma \left\{ \left(\frac{\rho+\varepsilon}{r} \right)^n - \left(\frac{\rho}{r} \right)^n - \frac{\varepsilon}{r}\, n \left(\frac{\rho}{r} \right)^{n-1} \right\} \quad \dots(1)$$

இப்பொழுது, $\displaystyle\sum_0^\infty \left(\frac{\rho+\varepsilon}{r} \right)^n = \left(1 - \frac{\rho+\varepsilon}{r} \right)^{-1}$

$$= \left(\frac{r-\rho-\varepsilon}{r} \right)^{-1} = \frac{r}{r-\rho-\varepsilon}$$

இதே விதமாக $\sum_{0}^{\infty}\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n} = \left(1-\frac{\rho}{r}\right)^{-1} = \frac{r}{(r-\rho)}$

$$\sum n\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n-1} = \left(1-\frac{\rho}{r}\right)^{-2} = \frac{r^2}{(r-\rho)^2}$$

∴ (1) வது சமன்பாட்டின் வலப்பக்கம்

$$= \frac{M}{\varepsilon}\left\{\frac{r}{r-\rho-\varepsilon} - \frac{r}{r-\rho} - \frac{\varepsilon}{r}\cdot\frac{r^2}{(r-\rho)^2}\right\}$$

$$= \frac{Mr}{\varepsilon}\left\{\frac{1}{r-\rho-\varepsilon} - \frac{r-\rho+\varepsilon}{(r-\rho)^2}\right\}$$

$$= \frac{Mr}{\varepsilon}\left\{\frac{(r-\rho)^2 - [(r-\rho)^2-\varepsilon^2]}{(r-\rho-\varepsilon)(r-\rho)^2}\right\}$$

$$\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - g(z)\right| = \frac{Mr\,\varepsilon}{(r-\rho-\varepsilon)(r-\rho)^2}$$

இப்போது, $h \to 0$ ஆனால், $|h| = \varepsilon \to 0$ ஆகும்.

அதாவது, $\lim_{h\to 0}\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - g(z)\right| = 0$

$$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = g(z)$$

$$\therefore f'(z) = g(z)$$

$|z| < R$ ஆனால் $g(z)$ இருக்கிறதென அறிவோம். ∴ $f'(z)$ இருக்கிறது. அதாவது, $f(z)$ ஆனது, $|z| < R$ ஆனால், ஒரு பகுமுறைச் சார்பாகும்.

மாதிரிக் கணக்குகள் :

மாதிரி 1 : z-ன் எந்த மதிப்புக்கு, பின்வரும் அடுக்குத் தொடர்கள் ஒருங்கல் தொடராகும்?

(i) $\Sigma \frac{z^n}{n!}$ (ii) $\Sigma\ n!z^n$ (iii) $\Sigma\ z^n$

(i) இதில் $a_n = \frac{1}{n!}$; $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$ ∴ $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1}$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0. \therefore R = \infty.$$

$\therefore \; |z| < \infty$ ஆக இருந்தால், அதாவது $z = \infty$ தவிர, மற்றெல்லா மதிப்புகளுக்கும் ஒருங்கல் தொடராகும்.

(ii) இங்கு $a_n = n!$. $\therefore \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(n+1)!}{n!} = n+1.$

$$\frac{1}{R} = \underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} (n+1) = \infty. \quad \therefore \quad R = 0.$$

$\therefore \; z = 0$ ஆனால் தான் இது ஒருங்கல் தொடராகும். மற்றெல்லா மதிப்புகளுக்கும் இது விரிதொடர்.

(iii) இங்கு $a_n = 1$. $\therefore \; \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{1}{1} = 1.$

$$\therefore \frac{1}{R} = \underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} 1 = 1. \quad \therefore \quad R = 1.$$

$\therefore \; |z| < 1$ ஆனால் இது ஒருங்கலடையும்.

மாதிரி 2 : பின்வரும் அடுக்குத் தொடர்களின் ஒருங்கல் ஆரத்தைக் கண்டுபிடி :—

(i) $\Sigma \, (12+5i)^n z^n$ (ii) $\Sigma \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n^2} z^n$

(iii) $\Sigma \dfrac{n\sqrt{2}+i}{1+2in} z^n$ (iv) $\Sigma \dfrac{1}{3^n+4} z^n$

(v) $\Sigma \dfrac{(n!)^2}{2n!} z^n$ (vi) $\Sigma \dfrac{n!}{n^n} z^n$

(vii) $\Sigma \dfrac{1.4\ldots(3n-2)}{3.7\ldots(4n-1)} z^n$ (viii) $\Sigma \dfrac{(z-3)^n}{(n+1)^3 5^n}$

(i) இங்கு $a_n = (12+5i)^n$. $\therefore \; |a^n|^{1/n} = |12+5i| = 13$

$$\frac{1}{R} = \underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} |a_n|^{1/n} = 13. \quad \therefore R = 1/13.$$

(ii) இங்கு $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n^2} \; \therefore \; |a_n|^{1/n} = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

$$\frac{1}{R} = \underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} |a_n|^{1/n} = e. \quad \therefore R = 1/e.$$

(iii) $$|a_n| = \left|\frac{n\sqrt{2}+i}{1+2in}\right| = \left(\frac{1+2n^2}{1+4n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{2n^2}{4n^2}\right)^{1/2} \left\{\frac{1+1/2n^2}{1+1/4n^2}\right\}^{1/2}$$

$$\therefore |a_n|^{1/n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2n}\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)^{1/2n}\left(1+\frac{1}{4n^2}\right)^{-1/2n}$$

$$\frac{1}{R} = \underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} |a_n|^{1/n} = 1. \quad \therefore R = 1.$$

(iv) $$a_n = \frac{1}{3^n+4}\ ;\ a_{n+1} = \frac{1}{3^{n+1}+4}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^n+4}{3^{n+1}+4} = \frac{1+(4/3^n)}{3+(4/3^n)}$$

$$\frac{1}{R} = \underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{3} \quad \therefore R = 3.$$

(v) $$a_n = \frac{(n!)^2}{2n!}\ :\ a_{n+1} = \frac{(n+1!)^2}{(2n+2)!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)\ (2n+1)} = \frac{n+1}{2(2n+1)} = \frac{1+(1/n)}{4+(2/n)}$$

$$\frac{1}{R} = \underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{4} \quad \therefore R = 4$$

(vi) $$a_n = \frac{n!}{n^n} \quad \therefore \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

$$\frac{1}{R} = \underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{e} \quad \therefore R = e.$$

(vii) $$a_n = \frac{1.4\ldots(3n-2)}{3.7\ldots(4n-1)}\ ;\ a_{n+1} = \frac{1.4\ldots(3n-2)\ (3n+1)}{3.7\ldots(4n-1)\ (4n+3)}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3n+1}{4n+3} = \frac{3+(1/n)}{4+(3/n)}$$

$$\frac{1}{R} = \underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3}{4} \quad \therefore R = \frac{4}{3}$$

(viii) $\zeta = z-3$ ஆனால், தொடரை $\Sigma \dfrac{\zeta^n}{(n+1)^3 5^n}$ என எழுதலாம். இப்பொழுது

$$a_n = \frac{1}{(n+1)^3 5^n}; \quad a_{n+1} = \frac{1}{(n+2)^3\, 5^{n+1}}$$

$$\therefore \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^3}{(n+2)^3 5} = \frac{(1+1/n)^3}{(1+2/n)^3 . 5}$$

$$\frac{1}{R} = \underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{5}. \qquad \therefore R = 5$$

குறிப்பு: இதன் ஒருங்கல் வட்ட மையம் (3, 0) ஆகும்.

மாதிரி 3: பின்வரும் அடுக்குத் தொடர்கள் ஒருங்கல் அடையும் அரங்கங்களைக் கண்டு பிடி:

(i) $\Sigma \dfrac{1.\,4.7\ldots(3n-2)}{n!}\left(\dfrac{1-z}{z}\right)^n$ (ii) $\Sigma \left(\dfrac{iz-1}{2+i}\right)^n$

(iii) $\Sigma \left(\dfrac{2\,i}{z+1+i}\right)^n$ (iv) $\Sigma \dfrac{(-1)^{n-1}\, z^{2n-1}}{(2n-1)\,!}$

(v) $\Sigma\; n^2\left(\dfrac{z^2+1}{1+i}\right)^n$

(i) $\zeta = \dfrac{1-z}{z}$ ஆனால், தொடரானது $\Sigma a_n \zeta^n$ ஆகும். இதில்

$$a_n = \frac{1.\ 4\ldots(3n-2)}{n\ !}; \quad a_{n+1} = \frac{1.4\ldots(3n-2)\,(3n+1)}{(n+1)\ !}$$

$$\therefore \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3n+1}{n+1} = \frac{3+(1/n)}{1+(1/n)}$$

$$\frac{1}{R} = \underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 3. \quad \therefore R = 1/3.$$

$|\,\zeta\,| < \frac{1}{3}$ ஆனால், இது ஒருங்கல் தொடராகும்.

i.e. $\left|\dfrac{1-z}{z}\right| < \frac{1}{3}$ i.e. $3\,|\,1-z\,| < |\,z\,|$

i.e. $9\cdot|\,1-z\,|^2 < |\,z\,|^2$ i.e. $9\,(1-z)\,(1-\bar{z}) < z\bar{z}$

i.e. $8z\bar{z} - 9\,(z+\bar{z}) + 9 < 0$

i.e. $z\bar{z} - \frac{9}{8}(z+\bar{z}) + \frac{9}{8} < 0$

i.e. $\left(z - \frac{9}{8}\right)\left(\bar{z} - \frac{9}{8}\right) + \frac{9}{8} < \frac{81}{64}$

i.e. $\left|z - \frac{9}{8}\right|^2 < \frac{9}{64}$

i.e. $\left|z - \frac{9}{8}\right| < \frac{3}{8}$

∴ ஒருங்கல் வட்டத்தின் மையம் $\frac{9}{8}$; ஆரம் $\frac{3}{8}$.

(ii) $\zeta = iz - 1$ ஆனால், தொடரானது $\Sigma a_n \zeta^n$ ஆகும்.

இதில் $a_n = \left(\frac{1}{2+i}\right)^n \quad \therefore |a_n|^{1/n} = \left|\frac{1}{2+i}\right| = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\therefore \frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{5}}$. அதாவது, $R = \sqrt{5}$

∴ $|\zeta| < \sqrt{5}$ ஆனால் இது ஒருங்கல் தொடர்

i.e. $|z+i| < \sqrt{5}$.

∴ ஒருங்கல் வட்டத்தின் மையம் $-i$; ஆரம் $\sqrt{5}$.

(iii) இதில் $u_n = \left(\frac{2i}{z+1+i}\right)^n$; $u_{n+1} = \left(\frac{2i}{z+1+i}\right)^{n+1}$

$\therefore \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{2i}{z+1+i}\right| = \frac{2}{|z+1+i|}$

$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < 1$ ஆனால் இது ஒருங்கல் தொடர்.

$\therefore \frac{2}{|z+1+i|} < 1$

i.e. $|z+1+i| > 2$

∴ $-(1+i)$ஐ மையமாகவும், 2ஐ ஆரமாகவும் கொண்ட வட்டத்திற்கு வெளிப்புறத்தில் இது ஒருங்கல் தொடராகும்.

(iv) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot \frac{(2n-1)!}{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}$

$$= -\frac{z^2}{(2n+1)\,2n}$$

$$\frac{1}{R} = \underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{|z|^2}{(2n+1)\,2n} = 0. \quad \therefore R = \infty.$$

∴ $z=\infty$ தவிர, மற்றெல்லா மதிப்புக்கும், இது ஒருங்கல் தொடராகும்.

(v) $1+z^2=\zeta$ எனக் கொண்டால் தொடரானது

$$\sum \frac{n^2}{(1+i)^n}\,\zeta^n \text{ ஆகும்.}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{(1+i)^{n+1}} \cdot \frac{(1+i)^n}{n^2} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{1+i}$$

$$\frac{1}{R} = \underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \therefore R=\sqrt{2}$$

$|\zeta| < \sqrt{2}$ ஆனால், இது ஒருங்கல் தொடர். அதாவது, $|1+z^2| < \sqrt{2}$ ஆனல் இது ஒருங்கல் தொடர்.

மாதிரி 4: z ஆனது ஒருங்கல் வட்டத்தில் இருக்கும் போது, பின்வரும் அடுக்குத் தொடர்களின் தன்மையை ஆராய்க:

(i) $\Sigma \dfrac{z^n}{n(\log n)^2}$ (ii) $\Sigma \dfrac{(-1)^n z^n}{n}$ (iii) $\Sigma \dfrac{z^{4n}}{1+4n}$

(i) இதன் ஒருங்கல் வட்டம் $|z|=1$. (இதை நிரூபி)

இப்பொழுது $\left|\dfrac{z^n}{n(\log n)^2}\right| = \dfrac{1}{n(\log n)^2}$, $\because |z|=1$

ஆனால் $\Sigma \dfrac{1}{n(\log n)^2}$ ஒரு ஒருங்கல் தொடர் என்பதைக் காஷியின் ஒடுக்கல் (condensation) சோதனை மூலம் அறிவோம். ∴ கொடுக்கப்பட்ட தொடர் $|z|=1$-ல் அறவொருங்கல் தொடராகும்.

(ii) இதன் ஒருங்கல் வட்டம் $|z|=1$ என்பது தெளிவு.

$z=-1$ ஆனால், தொடரானது $\Sigma \dfrac{1}{n}$ ஆகும்.

இது விரிதொடர் என்பது தெளிவு.

இனி, $a_n = (-1)^n z^n$; $u_n = \dfrac{1}{n}$ எனக் கொண்டு $\Sigma\, a_n u_n$ ஐ டிரிக்லி சோதனைப்படி பரிசோதிப்போம்.

$$| S_n | = | -z+z^2-z^3+ \dots + (-1)^n z^n |$$

$$= \left| \frac{-z\{1-(-z^n)\}}{(1+z)} \right| \qquad \dots \quad z \neq -1$$

$$\leq \frac{|-z| + |(-1)^n z^{n+1}|}{|1+z|}$$

$$= \frac{2}{|1+z|}$$

$\therefore$ $\Sigma\, a_n$ ஆனது வரம்புக்குட்பட்டது.

மேலும், $\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}}\, u_n = \underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}}\, \dfrac{1}{n} = 0$

பின்னரும், $\Sigma\, | u_n - u_{n+1} | = \Sigma \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} \right)$

$$= \Sigma \frac{1}{n(n+1)}$$

என்பது ஒருங்கல் தொடராகும்.

$\therefore$ $z = -1$ தவிர மற்றெல்லா மதிப்புகளுக்கும், ஒருங்கல் வட்டத்தில் ஒருங்கல் தொடராகும்.

(iii) இதன் ஒருங்கல் வட்டமும் $|z| = 1$ என்பதுதான். $z = \pm 1$, $z = \pm i$ ஆக இருக்கும் போது, தொடரானது $\dfrac{1}{4n+1}$. இது விரிதொடர் என்பது தெளிவு. $\left(\dfrac{1}{n}\right.$ உடன் ஒப்பிடுக).

இனி $a_n = z^{4n}$, $u_n = \dfrac{1}{4n+1}$ எனக் கொண்டு டிரிக்லி முறைப்படி பரிசோதிப்போம்.

$$| S_n | = | 1 + z^4 + z^8 + \dots + z^{n-4} |$$

$$= \left| \frac{1-z^{4n}}{1-z^4} \right|$$

$$\leq \left(\frac{1+|z|}{|1-z^4|}\right)^{4n}$$

$$= \frac{2}{|1-z^4|}, \quad \because |z| = 1$$

$\therefore$ $S_n = \Sigma a_n$ வரம்புக்குட்பட்டது.

மேலும், $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4n+1} = 0.$

பின்னரும் $\Sigma \mid u_n - u_{n+1} \mid = \Sigma \left(\frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+5}\right)$

$$= \Sigma \frac{4}{(4n+1)(4n+5)}$$

என்பது ஒருங்கல் தொடராகும். $\left(\frac{1}{n^2}\right.$ உடன் ஒப்பிடுக $\left.\right)$

$\therefore$ $\Sigma a_n u_n$ ஒருங்கல் தொடராகும். அதாவது, $z = \pm 1, \pm i$ என்ற மதிப்புகள் நீங்கலாக, மற்றெல்லா மதிப்புகளுக்கும் ஒருங்கல் வட்டத்தில் இது ஒருங்கல் அடையும்,

பயிற்சி 3:

1. பின் வரும் அடுக்குத்தொடர்களின் ஒருங்கல் ஆரம் யாது?

(i) $\Sigma \frac{z^n}{n^p}$ (ii) $\Sigma \frac{z^n}{n^n}$ (iii) $\Sigma (\log n)^n z^n$

(iv) $\sum_{2}^{\infty} \frac{z^n}{\log n}$ (v) $\Sigma \frac{2^{-n} z^n}{1+n^2 i}$ (vi) $\Sigma (3+4i)^n z^n$

(vii) $\Sigma \frac{2+in}{2^n} z^n$ (viii) $\Sigma 2^{\sqrt{n}} z^n$ (ix) $\Sigma \frac{(-1)^n (z-2i)^n}{n}$

(x) $1 + \frac{a \cdot b}{1 \cdot c} + \frac{a(a+1)\, b\,(b+1)}{1 \cdot 2\; c\,(c+1)} z^2 + \ldots$

(xi) $\frac{z}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 5} z^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 5 \cdot 8} z^3 + \ldots$

(xii) $\Sigma \dfrac{(n+1)z^n}{(n+2)(n+3)}$

விடை : (i) 1 (ii) ∞ (iii) 0 (iv) 1 (v) 2 (vi) 1/5
(vii) 2 (viii) 1 (ix) 1 (x) 1 (xi) 2/3 (xii) 1.

2. பின்வரும் அடுக்குத் தொடர்களின் தன்மையை ஒருங்கல் வட்டத்தில் கண்டுபிடி.

(i) $\Sigma \dfrac{z^n}{n}$ (ii) $\sum_{2}^{\infty} \dfrac{z^n}{n \log n}$ (iii) $\sum_{2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n z^n}{n \log n}$

விடை : (i) $z=1$ல் மட்டும் விரிதொடர்.

(ii) $z=1$,, .

(iii) $z=-1$,, .

3. $f(z) = \Sigma \dfrac{z^n}{2^n+1}$ ன் ஒருங்கல் ஆரம் 2 என்றும், $z \to 2$ ஆகும் போது $(2-z) f(z) \to 2$ என்றும் நிரூபி.

4. z ன் எம்மதிப்புக்கு $\Sigma (-1)^n (z^n + z^{n+1})$ ஒருங்கல் தொடராகும்? அதன் தொகை என்ன? விடை $|z| < 1$; 1

5. z-ன் எம்மதிப்புக்கு $\Sigma \dfrac{1}{(z^2+1)^n}$ ஒருங்கல் தொடராகும்? அதன் தொகை என்ன? விடை $|z^2+1| > 1$; $1/z^2$

4. தொகை காணல்

4·1. இப்பொழுது 2·1 முதல் 2·2 வரை உள்ள வரையறைகளை நினைவுபடுத்திக் கொள்வது நலம்.

வளைகோடு குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கையுள்ள ஒழுங்கான (ஜார்டன்) வில்கள் தொடர்ச்சியாக சங்கிலித் தொடர்போல் இருந்தால் அதனை வளைகோடு (contour) என்போம். இது தன்னைத்தானே வெட்டிக் கொள்ளாமல் அடைத்த கோடாயிருந்தால் இதனை அடைத்த (closed) வளைகோடு எனலாம். எடுத்துக்காட்டாக, வட்டம் ஒரு அடைத்த வளைகோடாகும்.

எளிதாகத் தொடுத்த அரங்கமும், பல் வகையாகத் தொடுத்த அரங்கமும். D என்ற திறந்த தொடுத்த அரங்கத்தை எடுத்துக் கொள். இதனுள் உள்ள ஒவ்வொரு அடைத்த வளைகோட்டின் உட்புறம் உள்ள எல்லாப் புள்ளிகளும் Dஐச் சேர்ந்ததானுல், அதை எளிதாகத் தொடுத்த அரங்கம் என்போம். இன்றேல், அது பல்வகையாகத் தொடுத்த அரங்கம் ஆகும். எடுத்துக் காட்டாக, ஒரு வட்டமானது எளிய தொடுத்த அரங்கம். ஆனுல் இரு பொதுமைய வட்டங்களுக்கிடையே உள்ள அரங்கம் பல்வகையாகத் தொடுத்ததாகும்.

4·2. கோட்டுத்தொகை காணல் (Line Integral)

C என்ற கோடு α விலிருந்து β வரை செல்லும் ஒரு வளைகோடாக இருக்கட்டும். இது குறிப்பிட்ட நீளம் உடையதாக இருக்கட்டும். $f(z)$ என்பது Cயில் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் வரையறுக்கப் பட்டதாயும், தொடர்ச்சி உள்ளதாயும் இருக்கட்டும். C ஐப் பின்வருமாறு n பகுதிகளாகப் பிரி.

$$\alpha = z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n = \beta$$

ζ_k என்னும் புள்ளியை z_{k-1}, z_k ஐ இணைக்கும் வில்லில் எடுத்துக் கொள். இதில் $n \to \infty$ ஆகும் போது $|z_k - z_{k-1}|$-ன் உச்ச மதிப்பு பூச்சியத்தை அணுகினுல்,

$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k).(z_k - z_{k-1})$ ஆனது ஒரு குறித்த எல்லையை அடையும். இதனையே

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^\beta f(z)\,dz \text{ என்போம்.}$$

4·3. இதனையே வேறுமுறையில் வரையறை செய்வதும் உண்டு. $x = \phi(t)$; $y = \psi(t)$; $a \leq t \leq b$ என்பது C என்ற வளைகோடாக இருக்கட்டும். $t = a, b$ ஆக இருக்கும் போது, $z = a, \beta$ ஆக இருக்கட்டும். மேலும், ϕ, ψ, ϕ', ψ' என்பவை தொடர்ச்சியான சார்புகளாகும். இப்பொழுது

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f[\phi(t)+i\psi(t)]\,[\phi'(t)+i\psi'(t)]\,dt$$

என வரையறை செய்வோம். மேலும்,

$u + iv = f[\phi(t)+i\psi(t)]$ ஆனால்,

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b (u\phi' - v\psi')\,dt + i\int_a^b (u\psi' + v\phi')\,dt$$

$$= \int_C (u\,dx - v\,dy) + i\int (u\,dy + u\,vx)$$

என்று எழுதலாம்.

4·4. A. $\int_C dz = \int_a^\beta dz$ ஐ வரையறையிலிருந்து கண்டுபிடி.

$$\int_a^\beta dz = \text{எல்லை}_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1})$$

$$= \text{எல்லை}_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (z_k - z_{k-1}) \quad \ldots \because f(\zeta_k) = 1$$

$$= z_n - z_o = \beta - a.$$

குறிப்பு: இது அடைத்த வளைவரையானால் $a = \beta$.

$\therefore \int_C dz = 0.$

4·4. *B.* $\int_C z\,dz = \int_{\alpha}^{\beta} z\,dz = (\beta^2 - \alpha^2)/2$

$$\int_C z\,dz = \text{எல்லை}_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \zeta_k (z_k - z_{k-1}) \ldots \because f(\zeta_k)=\zeta_k$$

$$= \text{எல்லை}_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} z_k (z_k - z_{k-1}) = \text{எல்லை}_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} z_{k-1} (z_k - z_{k-1})$$

$$= \text{எல்லை}_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{2} (z_k + z_{k-1}) (z_k - z_{k-1})$$

$$= \text{எல்லை}_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{2} [(z_1^2 - z_0^2) + (z_2^2 - z_1^2) + \ldots + (z_n^2 - z_{n-1}^2)]$$

$$= \tfrac{1}{2} (z_n^2 - z_0^2) = (\beta^2 - \alpha^2)/2.$$

4·4 C. $\dfrac{1}{z-a}$ -ன் தொகையீட்டை, C என்ற வட்டத்தைச் சுற்றிக் கணக்கிடு. C ஐ $|z-a| = R$ என்ற வட்டமாகக் கொள்க.

C என்ற வட்டத்தின் சமன்பாடு $z-a=Re^{i\theta}$. θ ஆனது 0-ல் இருந்து 2π வர மாற, z ஆனது C ஐ ஒருமுறை இடஞ்சுழி சுற்றி வரும்.

$$\therefore \int_C \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{Re^{i\theta}} Re^{i\theta}\, i\,d\theta$$

$$= i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i.$$

4·4 D. $n \neq -1$ ஆனால் $\int_C (z-a)^n\, dz = 0$ என நிரூபி.

$$\int_C (z-a)^n\, dz = \int_0^{2\pi} R^n e^{in\theta} Re^{i\theta} . i d\theta$$

$$= i R^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta} d\theta$$

$$= i R^{n+1} \left| \frac{e^{i(n+1)\theta}}{i(n+1)} \right|_0^{2\pi}$$

$$= 0 \cdot \text{ இதில் } n \neq -1.$$

4·4 E. z_0 ஐயும், z_n ஐயும் இணைக்கும் C என்ற வளை கோட்டின் நீளம் L ஆகவும், Cயில் $|f(z)|$ ன் உச்சமதிப்பு M ஆகவும் இருந்தால் $\left| \int_C f(z)\, dz \right| \leq ML$ என நிரூபி.

4 2ல் உள்ளபடி ζ_k என்னும் புள்ளியை z_{k-1}, z_k ஐ இணைக்கும் வில்லில் எடுத்துக்கொள்.

$$\int_C f(z)\, dz = \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\ (z_k - z_{k-1})$$

இப்பொழுது, $\left| \Sigma f(\zeta_k)\ (z_k - z_{k-1}) \right|$

$$\leq \Sigma\ |f(\zeta_k)|\ \ |z_k - z_{k-1}|$$

$$\leq M \sum_{k=1}^{n} |z_k - z_{k-1}|$$

n ஆனது ∞ ஐ அணுக, $|z_k - z_{k-1}|$ ன் உச்ச மதிப்பும் பூச்சியத்தை அணுகும். எனவே

$$\left| \int_C f(z)\, dz \right| \leq \int_C |f(z)|\ |dz|$$

$$\leq M \int_C |dz|$$

$$\leq M \int_{t_0}^{t_n} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\ dt$$

$$\leq M\ L.$$

குறிப்பு : t_0, t_n முறையே z_0, z_nக்கு இசைந்தவை. 4·3 ல் உள்ள குறியீட்டைப்பார்.

இந்தத் தேற்றம் மிக முக்கியமானதாகும். இதைப் பல தடவை பின் வரும் தேற்றங்களில் உபயோகிப்போம். இனி (Goursat) கூர்சாவை ஒட்டி, பின்வரும் காஷியின் தேற்றத்தை நிரூபிப்போம்.

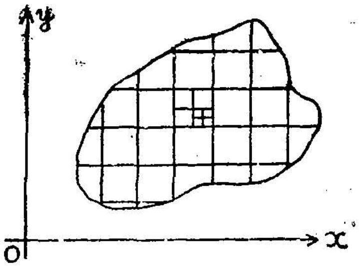
4·5 காஷியின் தேற்றம் :

C என்ற எளிய அடைத்த வளைகோட்டின் மேலும், உள்ளும் $f(z)$ பகுமுறைச் சார்பாயிருந்தால், $\int_C f(z)\, dz = 0$ ஆகும்.

துணைக்கோட்பாடு: ε என்பது கொடுக்கப்பட்ட மிகை யெண்ணாக இருக்கட்டும். *C*யின் உட்பகுதியைப் படத்தில் காட்டியபடி சதுரங்களாலும், அரை குறைச் (partial) சதுரங் களாலும் ஆன வலைக்கண்களாகப் (meshes) பிரிப்போம். ஒவ்வொரு வலைக்கண்ணிலும் உள்ள z-ன் எல்லா மதிப்புக்கும்

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon \quad \ldots (1)$$ என இருக்கும்

படி z_0 என்ற புள்ளி இருக்கும். இத்தகைய, முடிவுள்ள (finite) வலைக்கண்களை உடையதாக *C*ஐப் பிரிக்க முடியும்.



படம்— 9.

C யின் உட்புறப் பகுதியை *D* என்போம். அச்சுகளுக்கு இணையாக வரையப்பட்ட கோடுகளால் இதனைப் பிரிப்போம். இதில் ஏதேனும் ஒரு வலைக்கண்ணில் துணைக்கோட்பாடு பொய்யானால் அதனை 4 சதுரங்களாகப் (இவற்றில் சில அரைகுறைச் சதுரங்களாக இருக்கலாம்) பிரி. இதில் ஒன்றில் துணைக்கோட்பாடு பொய்யாக வேண்டும். இனி அதனை 4 சதுரங்களாகப் பிரி. இவ்வாறு செய்து கொண்டே போனால் நமக்கு ஒன்றுக்குள் ஒன்றாக உள்ள முடிவிலிச் சதுரங்களுக்குள்ளே இக்கோட்பாடு பொய்யாக வேண்டும் என்று தெரிகிறது. இவைகளின் எல்லைப் புள்ளியை ζ என்போம். இது *C*யினுள் இருக்க வேண்டும் என்பது தெளிவு.

$$\therefore \left| \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} - f'(\zeta) \right| \nless \varepsilon$$

∴ $f(z)$ ஆனது ζ-ல் வகையீடத்தக்கதல்ல. இது $f(z)$ பகு முறைச் சார்பு என்னும் கொள்கைக்கு முரணுனது. ∴ இந்தத் துணைக் கோட்பாடு உண்மையானதாகும்.

தேற்றத்தின் நிருபணம் : துணைக் கோட்பாட்டின்படி, C என்னும் வளைகோட்டையுடைய D என்ற அரங்கத்தை C_1, $C_2 \ldots C_n$ என்ற வலைக் கண்களாகப் பிரிக்கலாம். இவை சதுரங்களாகவோ, அரைகுறைச் சதுரங்களாகவோ, இருக்கும். z_1, $z_2, \ldots z_n$ என்ற புள்ளிகள் முறையே C_1, C_2, $\ldots C_n$ என்ற வலைக்கண்களுக்குள் (1) வது சமன்பாட்டுக்கிணங்க இருக்கும். இதனையே,

$$\frac{f(z)-f(z_k)}{z-z_k} - f'(z_k) = E(z_k); \text{ இதில் } |E(z_k)| < \varepsilon \qquad \ldots(2)$$

என எழுதலாம்.

$$\therefore f(z) = f(z_k) - z_k f'(z_k) + z f'(z_k) + (z-z_k).\ E(z_k).$$

$$\therefore \int_{C_k} f(z)\,dz = \int_{C_k} (z-z_k)\, E(z_k)\, dz.$$

ஏனெனில், 4·4A, B படி ஏனைய தொகையீடுகள் பூச்சியமாகும்.

$$\leq \varepsilon \int_{C_k} |z-z_k| \quad |dz| \qquad \text{(2) ஐப்பார்.}$$

C_k ஆனது ஒரு சதுரத்தினுடைய அல்லது அரைகுறைச் சதுரத்தினுடைய வரம்புக்கோடு. a என்பது இச்சதுரத்தின் பக்கமானல் $|z-z_k| \leq \sqrt{2}\,a$ என்றும்,

$$\int_{C_k} |dz| \leq 4a + L_k \text{ என்றும் அறிவோம்.}$$

இதில், C_k என்ற வலைக்கண்ணில் உள்ள, C என்ற கொடுக்கப்பட்ட வளைகோட்டின் பகுதிதான் L_k.

$$\therefore \int_{C_k} |z-z_k| \quad |dz| < \sqrt{2}a\,(4a+L_k)$$

$$\therefore \int_{C_k} f(z)\,dz < \varepsilon \sqrt{2}\,a\,(4a+L_k)$$

$$\therefore \int_C f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{C_k} f(z)\,dz$$

$$< \varepsilon\,[4\sqrt{2}\,n\,a^2 + L\sqrt{2}a]$$

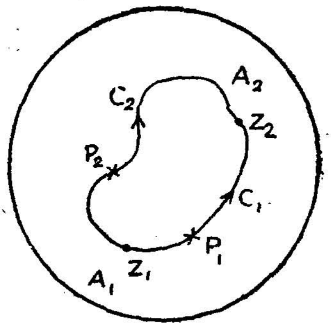
$$= 0$$

4·6 கிளைத் தேற்றம் 1 :

$f(z)$ ஆனது D என்ற எளிய தொடுத்த அரங்கத்தில் பகுமுறைச் சார்பாக இருக்கட்டும். அப்படியானால், இதனுள் உள்ள z_1, z_2 என்ற புள்ளிகளை இவ்வரங்கத்தினுள் உள்ள C_1, C_2 என்ற இரு வேறு ஜார்டன் வில்களால் இணைத்தால்,

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz.$$

நிரூபணம் : $A_1\,(z_1)$, $A_2\,(z_2)$ என்பவைகளை C_1, C_2 என்ற இரு வில்கள் சேர்க்கட்டும். $A_1 P_1 A_2 P_2 A_1$ ஒரு எளிய அடைத்த வளை கோடு ஆகும். $\therefore$ காஷி தேற்றத்தின்படி,



படம்—10.

$$\int_{A_1 P_1 A_2 P_2 A_1} f(z)\,dz = 0.$$

$$\therefore \int_{A_1 P_1 A_2} f(z)\,dz + \int_{A_2 P_2 A_1} f(z)\,dz = 0.$$

$$\therefore \int_{C_1} f(z)\,dz - \int_{A_1 P_2 A_2} f(z)\,dz = 0.$$

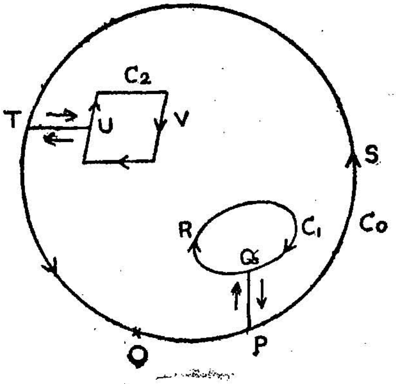
$$\therefore \int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz.$$

4·7. கிளைத்தேற்றம் 2.

$f(z)$ ஆனது பல் வகையாகத் தொடுத்த அரங்கம் Dயினுள்ளும் அதன் வரம்பான Cயிலும் பகுமுறைச் சார்பாக இருக்கட்டும். $C_0, C_1, \ldots C_n$ என்ற முடிவுள்ள அடைத்த வளை கோடுகளாலான, ஆனால் தொடுக்கப்படாத அரங்கங்களை

உடையது C. மேலும், C என்ற வரம்பை வரையும்போது Dயில் உள்ள புள்ளிகள் இடப்புறம் இருக்கட்டும். அப்படியானல்

$$\int_C f(z)\,dz = 0.$$



படம் 11

படத்தில் உள்ள பல் வகையாகத் தொடுக்கப்பட்ட அரங்கத்தைக் கவனி. இதில் C ஆனது C_0, C_1, C_2 ஆல் சேர்ந்தது. இப்போது $O\,P\,Q\,R\,Q\,P\,S\,T\,U\,V\,U\,T\,O$ என்பது ஒரு அடைத்த வளை கோடு.

$\therefore$ காஷியின் தேற்றத்தின்படி $\int_C f(z)dz = 0$.

$$\therefore \int_{OP+PQ+C_1+QP+PT+TU+C_2+UT+TO} f(z)\,dz = 0.$$

இதில் $\int_{PQ} f(z)\,dz + \int_{QP} f(z)\,dz = 0 = \int_{TU} f(z)\,dz +$

$\int_{UT} f(z)\,dz$ என்பது தெளிவு.

$OP+PT+TO = C_0$ என்பதைக் கவனி. மேலும், C_1, C_2 வழியே வலஞ்சுழியாகச் செல்கிறது.

$$\therefore \int_{C_0} f(z)dz - \int_{C_1} f(z)dz - \int_{C_2} f(z)\,dz = 0,$$

$$\therefore \int_{C_0} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz.$$

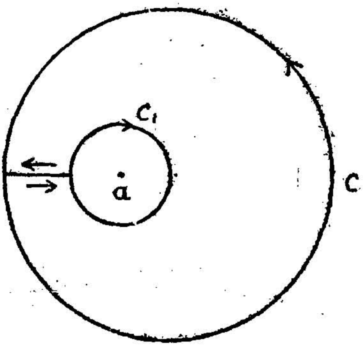
இதில் C_0ஐ C எனக் கொண்டு, பொதுவாக

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \dots + \int_{C_n} f(z)\,dz \text{ எனலாம்.}$$

4·8 காஷியின் தொகையீட்டுச் சூத்திரம்

$f(z)$ ஆனது C என்ற அடைத்த வளைகோட்டின் மேலும், உள்ளும் பகுமுறைச் சார்பாக இருக்கட்டும். a ஆனது Cயின் உள்ளே உள்ள புள்ளி ஆனால்

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\,dz}{z-a}$$



படம் 12

$z=a$ என்னும் புள்ளியைச் சுற்றி ஆரம் r உள்ள C_1 என்னும் வட்டம் வரை. d ஆனது C என்ற வளைகோட்டில் இருந்து aயின் தூரத்தைக் குறித்தால் $r<d$ ஆக இருக்கும்படி rஐ எடுத்துக் கொள்வோம்.

இப்பொழுது Cக்கும் C_1க்கும் இடையே உள்ள பகுதியில் (இதை கங்கணம் அல்லது annulus என்றும் சொல்வர்) $f(z)/(z-a)$ ஆனது பகுமுறைச்சார்பாகும்.

∴ 4·7ல் இருந்து

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-a)}\,dz = \int_{C_1} \frac{f(z)}{(z-a)}\,dz.$$

$$\int_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \int_{C_1} \frac{f(a)\,dz}{(z-a)} + \int_{C_1} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz \quad \dots \quad (1)$$

முதலாவதாக, $\int_{C_1} \frac{dz}{z-a}$ ஐ எடுத்துக் கொள்வோம்.

C_1 ஆனது $|z-a| = r$. $\therefore z-a = re^{i\theta}$

மேலும் θ ஆனது 0-ல் இருந்து 2π வரை மாறும்.

$$\therefore \int_{C_1} \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{i\theta}} \; ire^{i\theta} \, d\theta = 2\pi i \qquad \ldots (2)$$

இப்பொழுது, Cயினுள் $f(z)$ ஒரு பகுமுறைச் சார்பு.

$\therefore$ $|z-a| < \delta$ ஆனால் $|f(z) - f(a)| < \varepsilon$ ஆக இருக்கும்படி எத்தகைய ε ஐக் கொடுத்தாலும் δ ஐக் கண்டு பிடிக்க முடியும். ஆகவே, C_1-ன் ஆரமான r ஐ $r < \delta$ என இருக்கும்படி எடுத்துக்கொள்வோம். ஆகவே,

$$\int_{C_1} \frac{f(z) - f(a)}{z-a} \, dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z) - f(a)}{re^{i\theta}} \; ire^{i\theta} \, d\theta$$

$$\leq \int_0^{2\pi} |f(z) - f(a)| \;\; |i| \, d\theta$$

$$\leq \int_0^{2\pi} \varepsilon . 1. \; d\theta$$

$$\leq 2\pi \varepsilon$$

$$= 0. \qquad \ldots (3)$$

$\therefore$ (1), (2), (3)-ல் இருந்து.

$$\int_C \frac{f(z)}{z-a} \, dz = f(a) . 2\pi i$$

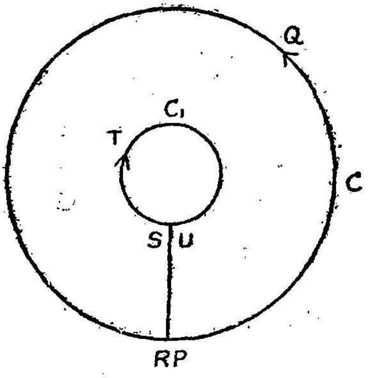
$$\therefore f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-a} \, dz$$

4·9. கிளைத்தேற்றம்

$f(z)$ ஆனது C, C_1 என்ற வளைகோட்டுக்கிடையே உள்ள பகுதியில் பகுமுறைச் சார்பாக இருக்கட்டும். a ஆனது இப்பகுதியின் உள்ளே உள்ள புள்ளி, C வெளிவளைகோடு ஆனால்,

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-a}\, dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(z)}{z-a}\, dz.$$

P Q R S T U P ஒரு அடைத்த வளைகோடாகும்.



படம் 13

∴ 4·8-ன் படி

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{PQRSTUP} \frac{f(z)\, dz}{z-a}$$

ஆனால் $\int_{PQRSTUP} F(z)\, dz = \int_{PQR} F(z)\, dz +$

$$\int_{RS} F(z)\, dz + \int_{STU} F(z)\, dz + \int_{UP} F(z)\, dz$$

இதில் $\int_{RS} F(z)\, dz + \int_{UP} F(z)\, dz = 0$

என்பது தெளிவு.

மேலும் $\int_{STU} F(z)\, dz = - \int_{UTS} F(z)\, dz$

$$= - \int_{C_1} F(z)\, dz$$

$$\therefore\ f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)\, dz}{z-a} - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(z)\, dz}{z-a}$$

4·10. வகைக்கெழுவுக்கு காஷியின் தொகையீட்டுச் சூத்திரம்

C என்ற எளிய அடைத்த வளைகோட்டின் மேலும், உள்ளும் $f(z)$ ஆனது பகுமுறைச் சார்பாக இருக்கட்டும். a ஆனது *C*யின் உள்ளே உள்ள புள்ளி ஆனால்,

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^2}$$

நிரூபணம் : $a+h$ என்ற புள்ளி a-யின் சுற்றுப் புறத்தில் இருக்கட்டும். $a+h$ உம் *C* யினுள் இருக்கும்படி எடுத்துக்கொள்ள இயலும். ∴ காஷியின் தொகையீட்டுச் சூத்திரத்தின்படி

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)dz}{z-a}; \quad f(a+h) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)\,dz}{z-(a+h)}$$

$$\therefore \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{h} \left\{ \frac{1}{z-a-h} - \frac{1}{z-a} \right\} dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{h(z-a)} \left\{ \left(1 - \frac{h}{z-a}\right)^{-1} - 1 \right\} dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{h(z-a)} \left\{ \frac{h}{(z-a)} + \frac{h^2}{(z-a)^2} + \dots \right\} dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{(z-a)} \left\{ \frac{1}{z-a} + \frac{h}{(z-a)^2} + \dots \right\} dz$$

$h \to 0$ ஆக இரு பக்கங்களிலும் எல்லையைக் கண்டுபிடி.

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)\ dz}{(z-a)^2}$$

4·11 கிளைத்தேற்றம் 1 :

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}} \qquad \dots(1)$$

இதைத் தொகுத்தறி முறைப்படி (induction) நிரூபிப்போம். $n = 1$ ஆக இருக்கும்போது தேற்றம் உண்மையானது என்பதை 4·10-ல் பார்த்தோம். இப்போது (1) ஐ உண்மையெனக் கொள்வோம். $(a+h)$ ஆனது C யின் உள்ளே a யின் சுற்றுப்புறத்தில் உள்ள புள்ளியாக இருக்கட்டும். அப்படியானால்.

$$f^{(n)}(a+h) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\,dz}{(z-a-h)^{n+1}}$$

$$\therefore \quad \frac{f^{(n)}(a+h) - f^{(n)}(a)}{h}$$

$$= \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{h}\left\{\frac{1}{(z-a-h)^{n+1}} - \frac{1}{(z-a)^{n+1}}\right\} dz$$

$$= \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}\,h}\left\{\left(1-\frac{h}{z-a}\right)^{-\overline{n+1}} - 1\right\} dz$$

$$= \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}\,h}\left\{\frac{(n+1)\,h}{(z-a)} + h \text{ ன் மேலடுக்குகள்}\right\} dz$$

$h \to 0$ ஆக, இருபக்கமும் எல்லை காண்போம்.

$$f^{(n+1)}(a) = \frac{(n+1)!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+2}}\,dz$$

∴ தேற்றம் n-க்கு உண்மையானால், $n+1$-க்கும் உண்மையாக வேண்டும். ஆனால் $n = 1$ ஆக இருக்கும்போது உண்மை (4·10). ∴ $n = 2$ ஆக இருக்கும் போதும், ஆகவே $n = 3, 4, \ldots$ ஆகிய எல்லா மிகை முழு எண்களுக்கும் தேற்றம் உண்மையாதல் வேண்டும்.

4·12. கிளைத்தேற்றம் 2:

ஆதியை உள்ளாகக் கொண்ட C என்ற அடைத்த வளை கோட்டில்

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{az}}{z^{n+1}}\, dz$$

$f(z) = e^{az}$ ஒரு பகுமுறைச் சார்பு ஆகும்.

$$\therefore\ f^{(n)}(z) = a^n \cdot e^{az} \quad \therefore\ f^{(n)}(0) = a^n$$

4·11-ல் இருந்து $f^{(n)}(a) = \dfrac{n!}{2\pi i} \displaystyle\int_C \frac{f(z)\, dz}{(z-a)^{n+1}}$

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{e^{az}\, dz}{z^{n+1}}$$

$$\therefore\ a^n = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{e^{az}\, dz}{z^{n+1}}$$

$$\therefore\ \left(\frac{a^n}{n!}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{a^n}{n!} \quad \frac{e^{az}\, dz}{z^{n+1}}\, dz$$

$$\therefore\ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n!}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_C \frac{a^n}{n!} \quad \frac{e^{az}}{z^{n+1}}\, dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_C \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a^n}{z^n} \cdot \frac{1}{n!}\right)\right] \frac{e^{az}}{z}\, dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{\frac{a}{z}} \cdot \frac{e^{az}}{z}\, dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{a(z+z^{-1})}}{z}\, dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{e^{2a\cos\theta}\, e^{i\theta}\, i d\theta}{e^{i\theta}},$$ C ஆனது $|z| = 1$ ஆனால்

அதாவது, $$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n!}\right)^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{2a\cos\theta}\, d\theta$$

இது கிளைத்தெற்றத்தின் நல்லதோர் துணை முடிவாகும்.

4·13. வரையறுத் தொகையீடு. (Definite Integral)

D என்ற அரங்கத்தில் $f(z)$ ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பாக இருக்கட்டும். z_0, z என்பவை முறையே Dயில் உள்ள கொடுக்கப் பட்ட, மாறும் புள்ளிகளாக இருக்கட்டும்.

$$\int_{z_0}^{z} f(t)\, dt = F(z) \qquad \dots (1)$$

என்பது மேல் எல்லையான zஐ மட்டும் சார்ந்ததாகும். ஏனெனில் 4.6ல் உள்ள தேற்றத்தின்படி z_0ஐயும், z_1ஐயும் இணைக்கும் பாதை எதுவாக இருப்பினும், இது மாறுத தொன்றாகும். இத்தகையத் தொகையீட்டினை வரையறுத் தொகையீடு என அழைப்பது பொருத்தமானதே.

இனி, $F'(z) = f(z)$ என நிரூபிப்போம். $z+h$ என்பது Dயில் உள்ள zயின் சுற்றுப் புறத்தில் இருக்கட்டும். இப்பொழுது,

$$F(z+h) - F(z) = \int_{z_0}^{z+h} f(t)\, dt - \int_{z_0}^{z} f(t)\, dt.$$

$$= \int_{z}^{z+h} f(t)\, dt.$$

$$\therefore \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h}\int_{z}^{z+h} f(t)\, dt - f(z)$$

$$= \frac{1}{h}\int_{z}^{z+h} f(t)\, dt - \frac{f(z)}{h}\cdot\int_{z}^{z+h} dt$$

$$= \frac{1}{h} \int_{z}^{z+h} \{ f(t) - f(z) \} \, dt$$

$$\therefore \left| \frac{F(z+h) - (z)}{h} - f(z) \right|$$

$$\leq \frac{1}{|h|} \int_{z}^{z+h} | f(t) - f(z) | \; | dt |$$

$f(t)$ ஆனது Dயில் தொடர்புடைச் சார்பு.

$\therefore \quad | t - z | < \delta$ ஆனுல் $| f(t) - f(z) | < \varepsilon$

ஆக இருக்கும்.

$$< \frac{1}{|h|} \int_{z}^{z+h} \varepsilon \, | dt | = \varepsilon.$$

$$\therefore \lim_{h \to 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) = 0.$$

(எல்லை $h \to 0$)

அதாவது, $F'(z) = f(z)$.

$F(z)$ன் வகைக்கெழு Dயில் இருப்பதால் அது ஒரு பகுமுறைச் சார்பாகும். எனவே, அதன் வகைக் கெழுவான $f(z)$யும் ஒரு பகுமுறைச் சார்பாக இருக்க வேண்டும். (4·10ஐப்பார்). இதிலிருந்து மொரீராவின் தேற்றம் விளங்கும்.

4·14. மொரீராவின் தேற்றம்:

$f(z)$ ஆனது D என்ற அரங்கில் தொடர்புடைச் சார்பாக இருக்கட்டும். அதில் உள்ள ஒவ்வொரு அடைத்த வளைகோடு Cயில் $\int_C f(z) \, dz = 0$ ஆனுல், $f(z)$ ஒரு பகுமுறைச் சார்பாகும்.

எனவே, D என்ற அரங்கில் உள்ள $f(z)$ என்ற தொடர்புடைச் சார்பானது, பகுமுறைச் சார்பாக இருப்பதற்கு வேண்டிய, போதுமான நிபந்தனையாவது;- D-யில் உள்ள ஒவ்வொரு அடைத்த கோடு C-யிலும் $\int_C f(z) \, dz = 0$.

4·15 காஷியின் சமனிலி :

C என்பது $|z-a| = R$ என்ற வட்டம். $f(z)$ ஆனது Cயின் மேலும், உட்புறமும் பகுமுறைச் சார்பாக இருந்து, C-யின் மேலுள்ள ஒவ்வொரு z-க்கும் $|f(z)| \leq M$ ஆனல், $|f^{(n)}(a)| \leq \frac{M.n!}{R^n}$ ஆகும்.

4·11-ல் உள்ளபடி $f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}}$

C-யின் மேல் $\left|\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\right| \leq \frac{M}{R^{n+1}}$ ... கொள்கை.

$$\therefore \quad |f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!}{2\pi\,|i|}\int_C \left|\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\right| |dz|$$

$$\leq \frac{n!}{2\pi}\frac{M}{R^{n+1}}\int_C |dz|$$

$$\leq \frac{n!}{2\pi}\frac{M}{R^{n+1}}\int_0^{2\pi} |Re^{i\theta}i|\,d\theta$$

$$\leq \frac{n!}{2\pi}\frac{M}{R^{n+1}}2\pi R$$

$$\leq \frac{M.n!}{R^n}$$

4·16 பூரணச் சார்பு :

(Integral or Entire function). முடிவுள்ள ஒவ்வொரு அரங்கிலும் $f(z)$ பகுமுறைச் சார்பானல் அதைப் பூரணச் சார்பு என அழைப்போம்.

4·17 (i) லியோவில்லின் தேற்றம் :

$f(z)$ ஒரு பூரணச் சார்பாகவும், $|f(z)|$ எல்லையுள்ளதுமாக இருந்தால் $f(z)$ ஒரு மாறிலியாகும்.

z-ன் எல்லா மதிப்புக்கும் $|f(z)| \leq M$ ... கொள்கை.

4·15 காஷியின் சமனிலியின்படி, a, R எதுவாக இருப்பினும், $|f'(a)| \leq \frac{M}{R}$

$\therefore$ $R \to \infty$ ஆனல், $f'(a) = 0$.

இதில் a எதுவாகவும் இருக்கலாம்.

$\therefore$ $f(z)$ ஒரு மாறிலியாகும்.

இதிலிருந்து இயற்கணித அடிப்படைத் தேற்றத்தை நிருபிப்போம்.

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n = 0$$

என்ற n-படிச் சமன்பாட்டிற்கு ஒரு மூலமாவது உண்டு.

$P(z) = 0$ க்கு ஒரு மூலமும் இல்லை எனக்கொள்வோம். அப்படியானல், $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ ஆனது zயின் எல்லா மதிப்புக்கும் பகுமுறைச் சார்பாகும். மேலும் $|f(z)| = \frac{1}{|P(z)|}$ வரம்புடையது என்பது தெளிவு. $|z| \to \infty$ ஆகும் போது, $|P(z)| \to \infty$ ஆகும்; $|f(z)| \to 0$ ஆகும்.

எனவே, லியோவில்லின் தேற்றத்தின்படி $f(z)$ ஒரு மாறிலி ஆகும். $\therefore$ $P(z)$ ஒரு மாறிலியாகும். இது ஒரு முரண்பாடு.

$\therefore$ $P(z) = 0$ க்கு ஒரு மூலமாவது உண்டு. அது α ஆக இருக்கட்டும். $\therefore$ $P(\alpha) = 0$.

இனி $P(z) = 0$ என்பதற்குச் சரியாக n மூலங்கள் உண்டு என நிருபிப்போம். இப்பொழுது,

$$\begin{aligned} P(z) - P(\alpha) &= a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n \\ &\quad - (a_0 + a_1 \alpha + a_2 \alpha^2 + \dots + a_n \alpha^n) \\ &= a_1 (z-\alpha) + a_2 (z^2-\alpha^2) + \dots + a_n (z^n-\alpha^n) \end{aligned}$$

$\therefore$ $P(z) = (z-\alpha)\, Q(z)$ ஏனெனில் $P(\alpha) = 0$. இதில் $Q(z)$ ஆனது $(n-1)$ படி உள்ளது. $\therefore$ $Q(z) = 0$ என்பதற்கு ஒரு மூலமாவது உண்டு. அது βவாக இருக்கட்டும். $\therefore$ $P(z) = (z-\alpha)(z-\beta)\, R(z)$. இவ்வாறு மேலும் மூலங்களைக் கண்டு பிடிக்க, n மூலங்களும் கிடைத்து விடும்.

4·17 (ii) இடைமதிப்புத் தேற்றம் : $f(z)$ ஆனது $|z-a| = r$ என்ற வட்டத்தின் மேலும், உள்ளும் பகுமுறைச் சார்பாக இருந்தால், C என்ற இந்த வட்டத்தில் $f(z)$ன் சராசரி மதிப்பு $f(a)$ ஆகும்.

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)\,dz}{z-a}$$

என்பது காஷியின் தொகையீட்டுச் சூத்திரம்.

$$|z-a| = r. \quad \therefore \quad z = a + re^{i\theta}$$

$$\therefore f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + re^{i\theta})\, re^{i\theta}\, i d\theta}{re^{i\theta}}$$

$$\text{அதாவது, } f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta})\, d\theta$$

4·17 (iii) உச்சமட்டுத் தேற்றம் : $f(z)$ ஆனது Cயின் மேலும் உள்ளும் பகுமுறைச் சார்பாயின், $|f(z)|$ ன் உச்ச மதிப்பு Cயின் மேல் இருக்கும்.

நிரூபணம் :

$$|f(a)| \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + re^{i\theta})|\, d\theta$$

$|f(a)|$ ஐ உச்சமதிப்பாகக் கொள்க. அப்படியானால்

$$|f(a + re^{i\theta})| \le |f(a)|$$

இப்பொழுது $|f(a + re^{i\theta})| < |f(a)|$ ஆக இருந்தால், $f(z)$ தொடர்புடைச் சார்பாகையால், இச்சமனிலியானது $\alpha < \theta < \beta$ என்னும் வில்லில் உண்மையாக இருக்க வேண்டும்

ஆனால் இவ்வாறாயின், $|f(a+re^{i\theta})|$ என்பதின் சராசரி மதிப்பு $|f(a)|$ ஐ விடக் குறையும். இது ஒரு முரண்பாடாகும். $\therefore$ $f(z)$ ஒரு மாறிலியாக இருக்க வேண்டும். இன்றேல் இதன் உச்சமதிப்பு Cயில் தான் இருக்க வேண்டும்.

4·17 (iv) மீச்சிறு (Minimum) மட்டுத்தேற்றம்

$f(z)$ ஆனது Cயின் மேலும், உட்புறமும் பகுமுறைச்சார்பாக இருக்கட்டும். Cயின் உள்ளே $f(z)\neq 0$ ஆனால், $|f(z)|$ அதன் மிகச் சிறிய மதிப்பை Cயின் மேல் அடைகிறது.

$f(z)$ ஒரு பகுமுறைச்சார்பு. $f(z)\neq 0$.

$\therefore$ $\dfrac{1}{f(z)}$ ஆனது Cயின் மேலும் உள்ளும் பகுமுறைச் சார்பு ஆகும். $\therefore$ உச்ச மட்டுத் தேற்றத்தின்படி $\left|\dfrac{1}{f(z)}\right|$ ன் உச்சமதிப்பு Cயில் இருக்கும். $\therefore$ $|f(z)|$ ன் மீச்சிறு மதிப்பு Cயில் இருக்கும்.

4·18 பாய்சான் தொகையீட்டு விதி

$|z|<\rho$ ஆக இருக்கும்போது, $f(z)$ ஒரு பகுமுறைச் சார்பாகும். $|a|<R<\rho$ ஆனால்.

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{(R^2-a\bar{a})\,f(z)\,dz}{(z-a)\,(R^2-z\bar{a})}$$

இதில் C என்பது $|z|=R$ என்ற வட்டத்தைக் குறிக்கும்.

இப்பொழுது, $$I=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{(R^2-a\bar{a})\,f(z)\,dz}{(z-a)\,(R^2-z\bar{a})}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C\left(\frac{1}{z-a}+\frac{\bar{a}}{R^2-z\bar{a}}\right)f(z)\,dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\left[\int_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz+\bar{a}\int_C \frac{f(z)}{R^2-z\bar{a}}\,dz\right]$$

C யின் மேலும், உள்ளும் $\frac{f(z)}{R^2 - z\bar{a}}$ ஆனது பகுமுறைச் சார் பாகும். $z = R^2/\bar{a}$ வட்டத்திற்கு வெளியில் இருக்கும் என்பதைக் கவனி (ஏனெனில் $|a| < R$).

$$\therefore \int_C \frac{f(z)}{R^2 - z\bar{a}}\, dz = 0$$

மேலும் $f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-a}\, dz$ ... (4·8)

என்பது காஷியின் தொகையீட்டு சூத்திரம்.

$$\therefore I = f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(R^2 - a\bar{a}) f(z)\, dz}{(z-a)(R^2 - z\bar{a})}$$

இதில் $a = re^{i\theta}$; $z = Re^{i\phi}$ என போடு. $r = |a| < R$.

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2) f(Re^{i\phi})\, Re^{i\phi} \,.\, id\phi}{\{Re^{i\phi} - re^{i\theta}\}\{R^2 - Rre^{i(\phi - \theta)}\}}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2) \,.\, f(Re^{i\phi})\, d\phi}{\{R - re^{i(\theta - \phi)}\}\{R - re^{-i(\theta - \phi)}\}}$$

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2) \,.\, f(Re^{i\phi})\, d\phi}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \phi) + r^2}$$

இதுவே பாய்சான் தொகையீட்டு விதியாகும்.

4·19. ஒரு சீராக ஒருங்குதல். (Uniform Convergence)

C என்பது $|z| = r$ என்ற வட்டத்தைக் குறிக்கட்டும். Cயின் மேலும், உள்ளும் ஒரு அடுக்குத் தொடர் ஒருங்கட்டும்.

$$S(z) = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad \ldots (1)$$

(In the sum above, the limit is printed as “எல்லை” with N→∞ beneath it.)

இதில் N உறுப்புகளுக்குப் பின் உள்ள எச்சமானது

$$R_N(z) = S(z) - S_N(z) = \text{எல்லை}_{k\to\infty} \sum_{n=N}^{N+k} a_n z^n \qquad \ldots (2)$$

இப்பொழுது, $|z| \leq |z_1| < r$ ஆனால்

$$\left|\sum_{n=N}^{N+k} a_n z^n\right| \leq \sum_{n=N}^{N+k} |a_n z^n| \leq \sum_{n=N}^{N+k} |a_n|\,|z_1|^n \ldots (3)$$

$z = z_1$ ஆனால் 3·6 படி (1) ஆனது அறவொருங்கல் தொடராகும். $\therefore N \longrightarrow \infty$ ஆகும்போது,

$$R'_N = \text{எல்லை}_{k\to\infty} \sum_{n=N}^{N+k} |a_n|\,|z_1|^n \longrightarrow 0 \text{ ஆகும்.}$$

$\therefore \varepsilon$ என்ற மிகையெண் கொடுக்கப்பட்டால், $N \geq N_\varepsilon$ ஆக இருக்கும்போது, $R'_N < \varepsilon$ ஆக இருக்கும்படி N_ε என்ற முழுவெண் உள்ளது என அறிகிறோம்.

R'_N ன் உறுப்புகள் மிகையெண்களாதலால்

$$\sum_{n=N}^{N+k} |a_n|\,|z_1|^n \leq R'_N$$

$$\therefore \left|\sum_{n=N}^{N+k} a_n z^n\right| \leq R'_N \qquad \ldots (3)\text{ஐப் பார்.}$$

$$\therefore \quad N > N_\varepsilon \text{ ஆனால், } |R_N(z)| \leq R'_N < \varepsilon$$

$\therefore \quad |z| \leq |z_1|$ ஆக இருக்கும்போது, N_ε ஆனது zஐச் சார்ந்ததல்ல. எனவே, (1)ல் உள்ள ஒருங்கல் அடுக்குத் தொடரானது, வட்டத்திற்கு உள்ளே, ஒரு சீரான ஒருங்கல் தொடராகும் என அறிகிறோம்.

இது சம்பந்தமாக, மேலும் சில முக்கியமான தேற்றங்களை இங்கு குறிப்பிடுகிறோம். இவற்றின் நிரூபணம் மெய்யெண்களின் பகு இயலை ஒட்டியுள்ளதால் இங்கு தரப்படவில்லை.

4·20. வியர்ஸ்ட்ராஸின் M - சோதனை.

ΣM_n என்பது மிகையெண்களைக் கொண்ட ஒரு ஒருங்கல் தொடராக இருக்கட்டும். D என்ற அரங்கத்தில், எல்லா z-க்கும்

$$|u_n(z)| \leq M_n \qquad \dots (n=1, 2, 3, \dots)$$

ஆனால் $\Sigma u_n(z)$ ஆனது Dயில் ஒரு சீரான, அறவொருங்கல் தொடராக இருக்கும்.

4·21. Dயில் உள்ள தொடர்புடைச் சார்புகள் ஒரு சீரான ஒருங்கல் அடைபவை ஆனால் அவற்றின் தொகையும் Dயில் தொடர்புடைச் சார்பாக இருக்கும்.

4·22. Cமேல் உள்ள $u_n(z)$ என்ற தொடர்புடைச் சார்புகள், $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ ஆனது Cயில் ஒரு சீராக ஒருங்கல் அடையும் வண்ணம் இருந்தால்

$$\int_C \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) \right\} dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_C u_n(z)\, dz \text{ ஆகும்.}$$

$$\text{மேலும், } \frac{d}{dz} \Sigma u_n(z) = \Sigma \frac{d}{dz} u_n(z) \text{ ஆகும்.}$$

4·23. D என்ற அரங்கத்தில் $u_1(z), u_2(z), \dots$ என்பவை பகுமுறைச் சார்புகளாக இருக்கட்டும். $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ ஒரு சீராக ஒருங்கலடைந்தால், $\Sigma u_n(z)$யும் ஒரு பகுமுறைச் சார்பாகும்.

4·24. டெய்லரின் தேற்றம் :

C என்பது $|z-a| = R$ என்ற வட்டம். Cயினுள் $f(z)$ ஒரு பகுமுறைச் சார்பாக இருந்தால், C யினுள் உள்ள z என்னும் புள்ளியில்

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(a) \cdot \frac{(z-a)^n}{n!} \quad \cdots \quad (1)$$ ஆகும்.

z என்பது Cயின் உள்ளே உள்ள புள்ளி.

$\therefore \; |z-a| = r < R$ ஆக இருக்க வேண்டும். இப்போது ρஐ $r<\rho<R$ என என எடுத்துக் கொள். t ஆனது $|t-a| = \rho$ல் உள்ள புள்ளியானல்,

$$\frac{1}{t-z} = \frac{1}{(t-a)-(z-a)} = \frac{1}{(t-a)\left\{1-\dfrac{z-a}{t-a}\right\}}$$

$$= \frac{1}{(t-a)}\left\{1+\frac{z-a}{t-a}+\cdots+\left(\frac{z-a}{t-a}\right)^{n-1}+\frac{\left(\dfrac{z-a}{t-a}\right)^n}{\left(1-\dfrac{z-a}{t-a}\right)}\right\}$$

$$\therefore \frac{f(t)}{(t-z)} = \frac{f(t)}{(t-a)} + (z-a)\cdot\frac{f(t)}{(t-a)^2} + \cdots\cdots$$

$$+ (z-a)^{n-1}\frac{f(t)}{(t-a)^n} + \frac{(z-a)^n f(t)}{(t-a)^n (t-z)} \quad \cdots \quad (2)$$

(2)ன் இருபக்கத்தையும் $2\pi i$ ஆல் வகுத்து, ஒவ்வொரு உறுப்பிற்கும் $|t-a| = \rho$ என்ற வட்டத்தின் வழியே தொகை காண்போம். இப்பொழுது, 4·8, 4·11ல் உள்ள

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\,dz}{z-a}\;;\; f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}}$$

என்னும் வாய்பாடுகளை நினைவிற் கொள்க.

$$\therefore f(z) = f(a) + f'(a)\,.\,(z-a)$$

$$+\frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(z-a)^{n-1} + R_n$$

இதில் $$R_n = \frac{(z-a)^n}{2\pi i}\int_{C'} \frac{f(t)\,dt}{(t-a)^n (t-z)} \quad \cdots \quad (3)$$

C' என்பது $|t-a| = \rho$ என்ற வட்டம். இதில் $|f(t)|$ ன் உச்சமதிப்பு M ஆக இருக்கட்டும். மேலும்,

$|z-a| = r$; $|t-z| \geq \rho - r$ என்பதைக் கவனி.

$$\therefore \quad |R_n| \leq \frac{r^n}{2\pi} \cdot \frac{M}{\rho^n(\rho-r)} \cdot 2\pi\rho = \frac{M\rho}{(\rho-r)} \cdot \left(\frac{r}{\rho}\right)^n$$

$r < \rho$ ஆகையால், $\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} |R_n| = 0$

$$\therefore \quad f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \dots \infty$$

4·25. மக்லாரின் தொடர் :

டெய்லர் தொடரில் $a = 0$ என்று போடு.

$$f(z) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} z + \frac{f''(0)}{2!} z^2 + \dots \infty$$

4·26. லாரன்ஸ் தொடர் :

$|t-a| = R$; $|t-a| = r$ என்பவை C_1 C_2 என்ற வட்டங்களாகவும், $R > r$ ஆகவும் இருக்கட்டும். $f(z)$ ஆனது இவ்வட்டங்கள் மேலும், இவற்றிற்கிடையே உள்ள பகுதியிலும் பகுமுறைச் சார்பாயிருந்தால், D என்ற இவற்றிற்கிடையே உள்ள அரங்கில்,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-a)^{-n} \quad \dots (1)$$

என்னும் ஒருங்கல் தொடராக எழுதலாம். இதில்,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(t)\,dt}{(t-a)^{n+1}}, \; n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(t)\,dt}{(t-a)^{-n+1}}, \; n = 1, 2, \dots \quad \dots (2)$$

முதலாவதாக, 4·9ஐ நினைவிற் கொண்டு

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{(t)\,dt}{t-z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(t)\,dt}{t-z} \quad \dots (3)$$

என எழுதலாம். இதில் உள்ள முதல் தொகையீட்டில் (4·24 மாதிரி).

$$\frac{1}{t-z} = \frac{1}{(t-a)-(z-a)}$$

$$= \frac{1}{(t-a)} + \frac{(z-a)}{(t-a)^2} + \ldots + \frac{(z-a)^{n-1}}{(t-a)^n} + \frac{(z-a)^n}{(t-a)^n\,(t-z)}$$

என்றும் இரண்டாம் தொகையீட்டில்

$$-\frac{1}{t-z} = \frac{1}{(z-a)-(t-a)}$$

$$= \frac{1}{z-a} + \frac{(t-a)}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{(t-a)^{n-1}}{(z-a)^n} + \frac{(t-a)^n}{(z-a)^n\,(z-t)}$$

என்றும் எழுதலாம். ∴ (3)ல் இருந்து.

$$f(z) = a_0 + a_1(z-a) + \ldots + a_{n-1}(z-a)^{n-1} + R_n$$
$$+ b_1(z-a)^{-1} - + \ldots + b_n(z-a)^{-n} + R'_n \cdots \qquad (4)$$

இதில் $a_n\ b_n$ என்பவை (2)ல் உள்ளபடியாகும்.

$\rho = |z-a|$ ஆனல் $r<\rho<R$ ஆகும்.

C_1, C_2 என்ற வட்டங்களில் $|f(t)|$ன் உச்ச மதிப்பு M ஆனல்,

$$|R_n| \leq \frac{\rho^n}{2\pi} \cdot \frac{M}{R^n(R-\rho)} \cdot 2\pi R = \frac{MR}{(R-\rho)}\left(\frac{\rho}{R}\right)^n$$

$\rho<R$ ஆகையால், $\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} |R_n| = 0.$

$$|R'_n| = \frac{\rho^{-n}}{2\pi} \cdot \frac{M}{r^{-n}(\rho-r)} \cdot 2\pi r = \frac{Mr}{(\rho-r)}\left(\frac{r}{\rho}\right)^n$$

$r<\rho$ ஆகையால், $\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} |R'_n| = 0.$

எனவே தேற்றத்தின் நிரூபணம் பூரணமாயிற்று.

குறிப்பு 1. (2)ல் தொகையிடப்படும் சார்புகள் C_1, C_2 என்ற வட்டங்களுக்கிடையில் t ன் பகுமுறைச் சார்பாகும். எனவே, C_1, C_2ஐ விடுத்து, இடைப்பகுதியில் உள்ள C என்ற ஏதேனும் ஒரு அடைத்த வளைகோட்டை எடுத்துக் கொண்டால், லாரன்ஸ் தொடரைப் பின் வருமாறு எழுதலாம்.

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)\, dt}{(t-a)^{n+1}}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$$

ஆனால், $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$. இதில் $r < | z-a | < R$. ...... (5)

குறிப்பு : 2. லாரன்ஸ் தொடர் ஒரே வகையானது.

கூடுமானால், $r < | z-a | < R$ ஆனால் (5)

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z-a)^n$$

என இருக்கட்டும். $a_n = b_n$ என நிருபிப்போம்.

$r < \rho < R$ என்றவாறு ρ ஐ எடுத்துக்கொள்.

C என்பது $| t-a | = \rho$ என்ற வட்டமாக இருக்கட்டும்.

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)\, dt}{(t-a)^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{(t-a)^{n+1}} \sum_{-\infty}^{\infty} b_m (t-a)^m\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{-\infty}^{\infty} b_m \int_C (t-a)^{m-n-1}\, dt$$

$| t-a | = \rho$ ஆகையால், $t-a = \rho e^{i\phi}$.

$\therefore \; a_n$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{-\infty}^{\infty} b_m \int_0^{2\pi} \rho^{m-n-1} \cdot e^{i(m-n-1)\phi} \cdot \rho e^{i\phi} \cdot i\,d\phi$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} b_m \int_0^{2\pi} \rho^{m-n} \; e^{i(m-n)\phi} \, d\phi$$

$m \neq n$ ஆனால்,

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} b_m \, \rho^{m-n} \left[\frac{e^{i(m-n)\phi}}{m-n} \right]_0^{2\pi}$$

$$= 0$$

$$m = n \text{ ஆனால், } a_n = \frac{1}{2\pi} b_n \int_0^{2\pi} \rho^0 \, d\phi$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot b_n 2\pi = b_n$$

4·27. லோபிதால் (L Hospital) விதி

a என்ற புள்ளி உள்ள D என்ற அரங்கில் $f(z)$ பகுமுறைச் சார்பானல்

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \eta(z-a)$$

இதில் $z \to a$ ஆனல், $\eta \to 0$ ஆகும்.

நிருபணம்:

$$\frac{f(z) - f(a)}{z-a} - f'(a) = \eta \text{ எனக் கொள்க.} \quad \ldots \quad (1)$$

$$\text{இப்போது, } \lim_{z \to a} \eta = \lim_{z \to a} \left\{ \frac{f(z) - f(a)}{z-a} - f'(a) \right\}$$

$$= f'(a) - f'(a) = 0.$$

$\therefore$ (1)ல் இருந்து

$$f(z) = f(a) + f'(a)\cdot(z-a) + \eta(z-a)$$

இதில் $z \to a$ ஆனால், $\eta \to 0$ ஆகும்.

கிளைத்தேற்றம் : $f(z)$, $g(z)$ என்பன aயில் பகுமுறைச் சார்பாக இருக்கட்டும். $f(a) = g(a) = 0$ ஆகவும், $g'(a) \neq 0$ ஆகவும் இருந்தால்

$$\lim_{z\to a} \frac{f(a)}{g(a)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$ என நிருபி.

இதுவே லோபிதால் விதி எனப்படும்.

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \eta(f)\cdot(z-a)$$

$$f(z) = f'(a)\cdot(z-a) + \eta(f)\cdot(z-a)$$

$\because$ $f(a) = 0$. இதில் $z \to a$ ஆனால் $\eta(f) \to 0$.

இதே மாதிரி $g(z) = g'(a)\cdot(z-a) + \eta(g)\cdot(z-a)$

$$\therefore \lim_{z\to a} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to a} \frac{f'(a)\cdot(z-a) + \eta(f)\cdot(z-a)}{g'(a)\cdot(z-a) + \eta(g)\cdot(z-a)}$$

$$= \lim_{z\to a} \frac{f'(a)\cdot(z-a) + 0}{g'(a)\cdot(z-a) + 0}$$

$$= \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

4·28. பகுமுறைச் சார்பின் பூச்சியங்கள் தனித்தவை (Isolated) :

z-யின் எம்மதிப்புக்கு $f(z) = 0$ ஆக உள்ளதோ, அது $f(z)$-யின் பூச்சியம் ஆகும். டெய்லர் தேற்றத்தின்படி $f(z)$ என்ற பகுமுறைச் சார்பை,

$$|z-a| < r \text{ ஆனால், } f(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n (z-a)^n \quad \ldots \quad (1)$$

என எழுதலாம். இதில் $a_0 = f(a)$; $a_n \cdot n! = f^{(n)}(a)$ என அறிக. $a_0 = 0$ ஆனால் a என்பது $f(z)$ன் பூச்சியமாகும். $a_m \neq 0$ ஆகவும். $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$ ஆகியவை பூச்சியமாகவும் இருந்தால் $z=a$ என்பது $f(z)$ன் m-தர பூச்சியம் ஆகும். இப்போது,

$$f(z) = (z-a)^m \sum_{n=0}^{\infty} a_{m+n} (z-a)^n \quad \dots \quad (2)$$

என எழுதலாம். இதில் $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{m+n} (z-a)^n \quad \dots \quad (3)$

என்பது ஒரு தொடர்புடைச் சார்பாகும். ஏனெனில் (3)ல் உள்ள தொடர், ஒருங்கல் தொடராகும். மேலும், $a_m \neq 0$ $\therefore$ $g(a) \neq 0$. $\therefore$ $g(z)$ ஆனது $|z-a| < \delta$ என்ற சுற்றுப்புறத்தில் $|g(z)-a_m| < \varepsilon$ ஆக இருக்கும். $\varepsilon = a_m/2$ எனக் கொள்க. அப்படியானல், இவ்வரங்கில் $g(z) = 0$ ஆக இருக்க முடியாது என்பது தெளிவு.

இப்பொழுது $m=0$ என போடு.

$\therefore \quad f(z) = g(z) \neq 0$

$\therefore$ $z=a$ என்ற பூச்சியம் தனித்தது. ஆனால் a என்பது, ஏதேனும் ஒரு பூச்சியம். எனவே, $f(z)$ன் எல்லா பூச்சியங்களும் தனித்தவை.

4·29. தனித்த சிறப்புப் புள்ளி :

$z=a$ என்னும் புள்ளியை விடுத்து, D என்ற அரங்கத்தில் $f(z)$ ஒரு பகுமுறைச் சார்பாக இருந்தால், a ஐ $f(z)$ன் தனித்த சிறப்புப் புள்ளி என்று சொல்வோம்.

$f(z) = 1/z$ ஆனல் $f'(z) = -1/z^2$

இதில் $z=0$ என்பது தனித்த சிறப்புப் புள்ளி. ஏனெனில் $f'(0)$ ஆனது வரையறுக்கப்படவில்லை.

குறிப்பு : $|z|^2$ என்ற சார்பு பகுமுறைச் சார்பல்ல என (முன்பே) நிரூபித்துள்ளோம். ஆகவே, அதன் சிறப்புப் புள்ளிகள் குறித்து ஆராய்வது அர்த்தமற்றதாகும்.

இப் பொழுது $z=a$ ஐத் தனித்த சிறப்புப் புள்ளியாகக் கொண்ட $f(z)$ஐ $0 < |z-a| \leq r$ என்ற வட்டத்தில் லாரன்ஸ் தொடராக விரித்தெழுதுவோம்.

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-a)^{-n} \quad \dots \quad (1)$$

இதில் $\sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-a)^{-n}$ என்பது $z=a$ என்ற தனித்த சிறப்புப் புள்ளியில் $f(z)$ன் "தலையாய பகுதி" ஆகும் (2)

நீக்கக் கூடிய சிறப்புப் புள்ளி எல்லா n-க்கும், $b_n=0$ ஆனுல், $z=a$ஐ நீக்கக் கூடிய சிறப்புப் புள்ளி என்போம். ஏனெனில், $z=a$ல் $f(z)$ஐ முறையாக வரையறுத்து $|z-a| \leq r$ என்ற வட்டத்தில் $f(z)$ஐ ஒரு பகுமுறைச் சார்பாக எழுத முடியும். இது அறிமுறையில் முக்கியத்துவம் வாய்ந்ததல்ல என்பது தெளிவு.

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} \text{ ல் } \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$$

$\therefore$ $z=0$ ஒரு நீக்கக் கூடிய, சிறப்புப் புள்ளி.

இங்கு $$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z}\left(\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots \right)\right)$$

$$= 1 - \frac{z^2}{3!} + \cdots$$

$\therefore$ $f(0)=1$ என வரையறை செய்கிறேம்.

4·30. ரைமன் தேற்றம்:

$0<|z-a|<R$ என்ற அரங்கில் $f(z)$ ஆனது பகுமுறைச் சார்பாக இருந்து, $|f(z)|<M$ ஆகவும் இருந்தால், $f(z)$ ஆனது $z=a$யில் பகுமுறைச் சார்பாகும், அல்லது, a ஒரு நீக்கக்கூடிய சிறப்புப் புள்ளி.

C ஆனது $|z-a|=r$ $(<R)$ என்ற வட்டத்தைக் குறிக்கட்டும். இப்பொழுது, லாரன்ஸ் தொடரில்,

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{-n+1}}$$

$$|b_n| \leq \frac{r^n}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(a+re^{i\theta})|\,|e^{in\theta}|\,d\theta$$

$|b_n| \leq Mr^n$. இதில் r ஐ மிகச் சிறிதாக்கினுல்,

$b_n = 0.$ $\quad n=1, 2, 3, \ldots\ldots$

$\therefore$ லாரன்ஸ் தொடரானது, டெய்லர் தொடராகிறது.

அதாவது, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n, \quad 0 < |z-a| < r,$

$\therefore$ $f(a)$ ஐ a_0 என வரையறுக்க, $f(z)$ ஆனது a யில் பகுமுறைச் சார்பாகும்.

4·31. தனித்த சாரமான சிறப்புப்புள்ளி:

லாரன்ஸ் விரித்தலில் உள்ள $\sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-a)^{-n}$ என்பது ஒரு முடிவிலித் தொடராயின், a ஐ தனித்த சாரமான சிறப்புப் புள்ளி என்போம். இதனையே, முடிவுள்ள ஒரு n—க்கு

$\lim_{z \to a} (z-a)^n f(z) = c$ என்றவாறு n-ஐக் கண்டுபிடிக்க முடியாவிடில், a ஒரு தனித்த சாரமான சிறப்புப்புள்ளி எனலாம். எடுத்துக்காட்டாக,

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!} \frac{1}{z^3} + \ldots$$

என்பதில் $z=0$ ஒரு தனித்த சாரமான சிறப்புப்புள்ளி.

4·32. n-தர துருவம்:

லாரன்ஸ் தொடரின் தலையாய பகுதியான $\sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-a)^{-n}$ என்பதில் $b_n \neq 0$ ஆகவும், b_{n+1} b_{n+2}, ... ஆகிய அனைத்தும் 0 ஆகவும் இருந்தால் a ஐ n-தர துருவம் என்போம். முதல் தர துருவத்தை எளிய துருவம் என அழைப்பது மரபு.

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2 (z^2+1)} \quad \text{என்பதில்}$$

$z=1$ ஆனது 2-தர துருவம், $z = \pm i$ ஆகியவை எளிய துருவங்கள்.

4·33. தேற்றம்:

$z=a$ என்பது $f(z)$-ன் n-தர துருவமானால் $z \to a$ ஆகும்போது, $|f(z)| \to \infty$ ஆகும்.

கொள்கைப்படி, $g(z) = (z-a)^n f(z)$ ஆகும்.

இதில் $g(a) = b_n \neq 0$

மேலும், $g(z)$ ஒரு தொடர்புடை பகுமுறைச் சார்பு.

எனவே $|g(z)| \geq |b_n|/2$ எனலாம்.

$$\therefore \quad |f(z)| \geq \frac{|b_n|}{2} \quad |z-a|^{-n}$$

$\to \infty$ என்பது தெளிவு.

4·34. தேற்றம்

$f(z)$ ஆனது $z=a$-ல் n-தர துருவத்தை உடையதானால், $\frac{1}{f(z)}$ ஆனது $z=a$-ல் n-தர பூச்சியத்தை உடையதாய் இருக்கும்.

கொள்கைப்படி, $0<|z-a| \leq r$ என்ற வட்டத்தில்,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n + \sum_{k=1}^{n} b_k (z-a)^{-k} \quad \ldots b_n \neq 0$$

$\therefore \quad f(z) = \frac{1}{(z-a)^n} \cdot g(z)$ என எழுதலாம்.

$\therefore$ (i) $g(a) = b_n \neq 0$ (ii) $|z-a| \leq r$-ல் $g(z)$ ஆனது ஒரு பகுமுறைச் சார்பாக இருக்க வேண்டும் எனலாம்.

$$\therefore \quad \frac{1}{f(z)} = \frac{(z-a)^n}{g(z)} \quad \ldots \quad (1)$$

இதில் $z \to a$ ஆனால், $[g(a) \neq 0]$ $\quad \frac{1}{f(z)} = 0$

$\therefore \quad \frac{1}{f(z)}$ ஆனது n-தர பூச்சியம் உடையது.

பயிற்சி : இதன் மறுதலையை நிரூபி.

4·35. கிளைத்தேற்றம் :

$f(z)$ ன் துருவங்கள் தனித்தவையாகும்.

நிரூபணம் : $f(z)$ ன் துருவங்கள், $\frac{1}{f(z)}$ ன் பூச்சியங்களாகும், ஆனால் பூச்சியங்கள் தனித்தவை. (4·28)

$\therefore$ துருவங்களும் தனித்தவை.

4·36. முடிவிலியும், பூச்சியமும்:

$f(z)$ ஆனது ∞-ல் எத்தகையது என்பதை ஆராய $z = 1/z'$ என்று போட்டு $f(1/z')$ ஆனது $z' = 0$-ல் எத்தகையது என ஆராய்ந்தால் போதுமானது.

4·37. பூச்சியங்களின் எல்லைப் புள்ளி:

D என்றஅரங்கில் பகுமுறைச் சார்பான $f(z)$-ன் பூச்சியங்களான $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ என்பவைகளின் எல்லைப் புள்ளியான a யும், D-யின் உட்புறம் இருந்தால் $f(z) \equiv 0$ ஆகும். அல்லது a ஒரு தனித்த சாரமான சிறப்புப் புள்ளியாகும்.

ஏனெனில், $f(z)$ ஒரு தொடர்புடைச் சார்பு ஆதலின், a-யின் ஒவ்வொரு சுற்றுப் புறத்திலும் ஒரு பூச்சியப் புள்ளி இருப்பதால் $f(a) = 0$ ஆகவேண்டும். அதாவது, a ஒரு பூச்சியப் புள்ளி ஆக வேண்டும். ஆனால் பூச்சியப் புள்ளிகள் தனித்திருக்க வேண்டும். இது அவ்வாறில்லை. எனவே, $f(z) \equiv 0$ ஆக வேண்டும். இல்லாவிடில், $f(z)$-க்கு a ஒரு சிறப்புப் புள்ளியாக இருக்க வேண்டும். இச் சிறப்புப்புள்ளி தனித்ததாக இருக்க வேண்டும். மேலும், அது துருவமாகாது. ஏனெனில், $z \to a$ ஆகும்போது $f(z)$ ஆனது ∞ ஐ அணுகவில்லை. எனவே $z=a$ ஒரு தனித்த சாரமான சிறப்புப் புள்ளியாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $\sin(\pi/z)$-ல் $n = \pm 1, \pm 1/2, \pm 1/3 \ldots$ ஆகியவை பூச்சியங்கள். இவற்றின் எல்லைப் புள்ளியான $z=0$ ஒரு தனித்த சாரமான சிறப்புப் புள்ளியாகும்.

4·38. துருவங்களின் எல்லைப்புள்ளி:

$z=a$ என்பது $f(z)$ ன் $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ என்ற துருவங்களின் எல்லைப் புள்ளியாக இருக்கட்டும். இவ்வாறானால், aயின் ஒவ்வொரு சுற்றுப் புறத்திலும் ஒரு துருவமாவது இருக்க வேண்டும். $\therefore$ $z=a$ என்பது ஒரு சிறப்புப் புள்ளி ஆகும். ஆனால் அது துருவமாக இருக்க முடியாது. ஏனெனில் துருவமானது தனித்ததாகும். $\therefore$ இத்தகைய சிறப்புப் புள்ளியை தனித்திராத சாரமான சிறப்புப் புள்ளி என்றோ, அல்லது சுருக்கமாகச் சாரமான சிறப்புப்புள்ளி என்றோ சொல்வது வழக்கம்.

4·39. வியர்ஸ்ட்ராசின் தேற்றம்:

a ஆனது $f(z)$-யின் சாரமான சிறப்புப் புள்ளி; ε ஒரு மிகையெண்; c ஏதேனும் ஒரு கலப்பெண்; ஆனால் a-யின் ஒவ்வொரு சுற்றுப் புறத்திலும் $|f(z)-c| < \varepsilon$ என்பதற்கிணங்க ஒரு z உண்டு.

நிரூபணம் : தேற்றம் உண்மையல்ல எனக் கொள்க.

அப்படியானால், $0 < |z-a| < r$ என்னும் அரங்கில், $|f(z)-c| \geq \varepsilon$ என்பது எல்லா z-கும் பொருந்தும்.

$\therefore \; g(z) = \dfrac{1}{f(z)-c}$ என்பது இவ்வரங்கில் வரம்பு புடைய பகுமுறைச் சார்பாகும். $\therefore$ a ஆனது, ரைமன் தேற்றத்தின்படி, நீக்கக்கூடிய சிறப்புப் புள்ளியாகும். $\therefore$ $g(a)$ ஐ $g(z)$ ஆனது பகுமுறைச் சார்பாக இருக்கும்படி வரையறுப் போம். மேலும், $f(z)$ ஆனது மாறிலி அல்ல. எனவே, $g(z)$யும் மாறிலி அல்ல. ஆகவே டெய்லர் தேற்றத்தின்படி $g(a) \neq 0$ அல்லது $g(z)$ ஆனது a-யில் ஒரு n-தர பூச்சிய சார்பு. இதில் $n \neq \infty$.

$\therefore \; \dfrac{1}{g(z)} = f(z)-c$ ஆனது $z=a$ யில் ஒரு பகுமுறைச் சார்பாகும். அல்லது ஒரு n-தர துருவ சார்பாகும். இது நம் கொள்கைக்கு முரணானது.

4·40. முடிவிலியில் $f(z)$ன் பூச்சியங்களும் துருவங்களும்.

$f(z)$ ஆனது முடிவிலியில் m- தர பூச்சியத்தை உடைய தெனக் கொள்க. அப்படியானால் $g(z) = f\left(\dfrac{1}{z}\right)$ என்னும் சார்பு $z=0$ல் m- தர பூச்சியத்தை உடையதாக இருக்க வேண்டும்.

$$\therefore g(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n = f\left(\frac{1}{z}\right)$$

$$\therefore f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n z^{-n}$$

$$= \frac{a_m}{z^m} + \frac{a_{m+1}}{z^{m+1}} + \dots$$

என்பது ∞யில் m- தர பூச்சியத்தை உடையதாகும்.

இதேவிதமாக, $z=\infty$யில் m- தர துருவத்தையுடைய சார்பு $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{m} a_n z^n$ என நிரூபிக்கலாம் இதை விரித்தெழுத,

$$f(z) = \dots \frac{a_{-3}}{z^3} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_m z^m.$$

4.41. தேற்றம். $f(z)$ ஆனது முடிவிலி உட்பட z-தளம் முழுவதும் ஒரு பகுமுறைச் சார்பாக இருந்தால் அது ஒரு மாறிலியாகும்.

$f(z)$ ஒரு பகுமுறைச் சார்பு. எனவே, டெய்லர் தேற்றத்தின் படி $f(z) = \Sigma a_n z^n$.

இது முடிவிலியிலும் பகுமுறைச் சார்பாக உள்ளது.

$\therefore\ g(z) = f\left(\dfrac{1}{z}\right)$ ஆனது $z=0$ல் பகுமுறைச் சார்பு.

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots$$

இது $z=0$ல் பகுமுறைச் சார்பாதலின்

$$a_1 = a_2 = \ldots = 0.$$

$$\therefore f(z) = a_0 = \text{மாறிலி}$$

4·42. தேற்றம். முடிவிலி உட்பட எல்லாப் புள்ளிகளிலும் துருவங்களை அல்லாமல் வேறு சிறப்புப் புள்ளிகள் இல்லாத சார்பு விகிதமுறு சார்பாக இருக்க வேண்டும்.

நிரூபணம்:

$f(z)$ அத்தகைய சார்பாக இருக்கட்டும். அப்படியானல் $f(z)$யில் முடிவுள்ள எண்ணிக்கையுள்ள துருவங்கள் தான் இருக்க முடியும். இல்லாவிடில், இவைகளுக்கு ஒரு எல்லைப்புள்ளி இருக்கும். அது தனித்திராத சாரமான சிறப்புப்புள்ளியாக இருக்கும். அது கொள்கைக்கு முரணுக இருக்கும்.

எனவே $f(z)$ ஆனது $a_1, a_2, \ldots a_e$ என்ற புள்ளிகளில் $n_1, n_2, \ldots n_e$ தர துருவங்களை உடையதாயிருந்தால்.

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a_1)^{n_1}(z-a_2)^{n_2}\ldots(z-a_e)^{n_e}} \qquad \ldots (1)$$

என எழுதலாம். இதில் $g(z)$ ஆனது zயின் முடிவுள்ள மதிப்புகளுக்கு பகுமுறைச் சார்பாக இருக்கவேண்டும் என்பது தெளிவு.

$$\therefore g(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n z^n \text{ என எழுதலாம்.}$$

$g(z)$ ஆனது முடிவிலியில் துருவத்தை உடையதாயின் $g(z)$ பல்லுறுப்புக் கோவையாகத்தான் இருக்கமுடியும். $\therefore$ (1)ல் இருந்து $f(z)$ ஒரு விகித முறுசார்பு என்பது தெளிவு.

மறுதலையாக, விகித முறு சார்பின் சிறப்புப்புள்ளிகள் துருவங்களன்றி வேறல்ல.

$f(z) = g(z)/h(z)$ ஆக இருக்கட்டும்.

இதில் $g(z)$, $h(z)$ என்பவை பல்லுறுப்புக் கோவைகள். $g(z)$க்கும், $h(z)$க்கும் பொதுவான பூச்சியங்கள் இல்லையெனலாம்.

$f(z)$ன் சிறப்புப் புள்ளிகள் $h(z)$ன் பூச்சியங்களாகத்தான் இருக்க முடியும். $\frac{1}{f(z)}$ ஆனது இப் புள்ளிகளில் பகுமுறைச் சார்பாக இருக்கவேண்டும். $\therefore$ $f(z)$க்குத் துருவங்களைத் தவிர வேறு சிறப்புப் புள்ளிகள் இருக்க முடியாது.

மாதிரிக் கணக்குகள்

மாதிரி 1: $|z| \leq \frac{1}{2}$ ஆனால், $z(1-z) + z^2(1-z) + z^3(1-z) + \ldots$ என்பது ஒரு சீரான ஒருங்கல் தொடர் என நிருபி. இது $|z| \leq 1$ என்பதற்குப் பொருந்துமா என ஆராய்க.

$$S_n(z) = z(1-z) + z^2(1-z) + \ldots + z^n(1-z)$$

$$= z - z^{n+1}$$

$$|S_n(z) - z| = |-z^{n+1}| = |z|^{n+1}$$

$|z|^{n+1} < \varepsilon$ ஆக இருக்க வேண்டுமானால்

$$(n+1)\log|z| < \log\varepsilon$$

$$\therefore\ (n+1) > \frac{\log\varepsilon}{\log|z|}$$ ($\because$ $\log|z|$ ஒரு குறை எண்.

$$\therefore\ n > \frac{\log\varepsilon}{\log|z|} - 1$$

$|z| \leq \frac{1}{2}$. எனவே $\frac{\log\varepsilon}{\log|z|} - 1$-ன் உச்சமதிப்பானது $z = \frac{1}{2}$ ஆக இருக்கும் போது கிடைக்கும். ஆகையால்

$N = \frac{\log\varepsilon}{\log\frac{1}{2}} - 1$ எனக் கொண்டால், N ஆனது εஐ மட்டும் சார்ந்ததே அன்றி zஐச் சார்ந்ததல்ல. $\therefore$ இது ஒரு சீராக ஒருங்கலடைகிறது. இதன் தொகை z.

இதே நிரூபணம் $|z| \leq \cdot 9$ அல்லது $\cdot 99$ ஆக இருந்தாலும் பொருந்தும். ஆனால் $|z| \leq 1$ ஆக இருக்கும் போது $N = \dfrac{\log \varepsilon}{\log 1} - 1$ என்பது ∞ ஆகும். ∴ இப்போது, இத்தொடர் ஒரு சீராக ஒருங்கலடையாது.

மாதிரி 2: பின்வரும் அரங்கங்களில் $\dfrac{1}{(z+1)(z+3)}$ ஐ லாரன்ஸ் தொடராக விரித்தெழுது:

(i) $1 < |z| < 3$ (ii) $|z| > 3$ (iii) $|z| < 1$

(iv) $0 < |z+1| < 2$

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{z+1}\right) - \tfrac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{z+3}\right) \quad \cdots \quad (1)$$

(i) $|z| > 1 \quad \therefore \quad \dfrac{1}{z+1} = \dfrac{1}{z\{1+(1/z)\}}$

$$= \frac{1}{z}\cdot\left\{1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \ldots\right\}$$

$$= \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} - \ldots\right) \ldots (2)$$

$|z| < 3. \qquad \therefore \dfrac{1}{z+3} = \dfrac{1}{3(1+z/3)}$

$$= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{z}{3} + \frac{z^2}{9} - \ldots\right) \ldots (3)$$

∴ (1)ல் இருந்து $f(z) = \tfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{z^2} + \dfrac{1}{z^3} \ldots\ldots\right\}$

$$- \frac{1}{6}\left\{1 - \frac{z}{3} + \frac{z^2}{9} \ldots\ldots\right\}$$

(ii) $|z| > 3. \quad \therefore \quad |z| > 1 \quad \therefore$ (2) ஐ உபயோகிக்கலாம்.

மேலும் $\dfrac{1}{z+3} = \dfrac{1}{z(1+3/z)}$

$$= \frac{1}{z}\ \{1 - 3/z + 9/z^2 \ldots\ldots\}$$

$$= \left\{\frac{1}{z} - \frac{3}{z^2} + \frac{9}{z^3} \ldots\ldots\right\} \quad \ldots \quad (4)$$

$\therefore$ (1), (2), (4)ல் இருந்து $f(z) = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} \cdots\cdots\right\}$

$$-\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{z} - \frac{3}{z^2} + \frac{9}{z^3}\cdots\cdots\right\}$$

(iii) $|z| < 1 \quad \therefore \quad |z| < 3 \quad \therefore$ (3) உபயோகப்படும்.

மேலும், $\dfrac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots$ (5)

$\therefore$ (1), (3), (5) ல் இருந்து $f(z) = \frac{1}{2}\{1 - z + z^2 - \ldots\}$

$$-\frac{1}{6}\left\{1 - \frac{z}{3} + \frac{z^2}{9} - \ldots\right\}$$

(iv) $z + 1 = t$ எனக்கொள்க $\therefore \quad 0 < |t| < 2$

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{t(t+2)} = \frac{1}{2t(1+t/2)}$$

$|t| < 2 \quad \therefore \quad |t/2| < 1$

$$\therefore f(z) = \frac{1}{2t}\left\{1 - t/2 + \frac{t^2}{4} - \ldots\right\}$$

$$= \frac{1}{2t} - \frac{1}{4} + \frac{t}{8} - \frac{t^2}{16} + \ldots$$

$$= \frac{1}{2(z+1)} - \frac{1}{4} + \frac{(z+1)}{8} - \frac{(z+1)^2}{16} + \ldots$$

மாதிரி 3 : (i) $|z-1| < 1$ ஆனுல்,

$$\log z = (z-1) - \frac{(z-1)^2}{2} + \ldots$$

(ii) $|z| < 1$ ஆனுல், $|\log(1+z)| \leq -\log(1 - |z|)$

(i) $f(z) = \log z$ என்ற சார்பானது, $|z-1| = 1$ என்ற வட்டத்தில், $z = 0$ என்னும் புள்ளியை விடுத்து, பகுமுறைச் சார் பாகும்.

$\therefore \quad f(z) = f\{1+(z-1)\}$

$$= f(1) + \frac{(z-1)}{1!} f'(1) + \ldots + \frac{(z-1)^n}{n!} f^{(n)}(1) + \ldots$$

$|z-1| < 1$ கொள்கை என்பதை நினைவிற் கொள்க.

$$\therefore \quad \log z = (z-1) - \frac{(z-1)^2}{2} + \ldots$$

ஏனெனில், $f^{(n)}(z) = (-1)^{n-1}(n-1)!/z^n$.

(ii) இதில் z ஐ $(z+1)$ ஆக மாற்று.

$|z-1| < 1$ என்பது $|z| < 1$ ஆகிறது.

$\therefore \quad |z| < 1$ ஆனால் $\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots$

$$\therefore \quad |\log(1+z)| = \left|z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots\right|$$

$$\leq |z| + \frac{|z|^2}{2} + \frac{|z|^3}{3} + \ldots$$

$$= -\log(1-|z|)$$

மாதிரி 4: $\int_0^{1+i} (x-y+ix^2)\, dz$ என்ற தொகையீட்டை

(i) $y = x$ என்ற கோடு வழியாகவும்,

(ii) மெய்யச்சு வழியே $z=0$ ல் இருந்து $z=1$ வரையிலும், பின் $x=1$ என்ற கோடு வழியாகவும் காண்க.

(i) $z = x + iy \qquad \therefore \quad dz = dx + idy.$

$y = x$...கொள்கை. $\therefore \quad dy = dx$

$$\therefore \int_0^{1+i} (x-y+ix^2)\, dz = \int_0^1 (x-x+ix^2)(dx+idx)$$

$$= i(1+i)\int_0^1 x^2 dx = i(1+i)/3.$$

(ii) முதற்பகுதி $z=0$ லிருந்து $z=1$ வரை.

இப்போது $y=0$ ... கொள்கை. $\therefore\ dy = 0.$

$$\int_0^1 (x-y+ix^2)(dx+idy) = \int_0^1 (x+ix^2)\ dx = \frac{1}{2}+\frac{i}{3}$$

இரண்டாம் பகுதி $z=1+i.0$ ல் இருந்து $1+i$ வரை.

இப்போது $x=1.$ $\therefore\ dx = 0.$

$$\therefore \int_{1+i0}^{1+i} (x-y+ix^2)(dx+idy)$$

$$= \int_0^1 (1-y+i)\, idy = \{(1+i)\, iy - iy^2/2\}_0^1$$

$$= (1+i)i - i/2 = \frac{i}{2} - 1$$

$\therefore$ இரு பகுதிகளையும் சேர்க்க, தொகையீடானது.

$-\frac{1}{2}+\frac{5i}{6}$ ஆகும்.

மாதிரி 5:

$$\sin\left\{ c\left(z+\frac{1}{z}\right)\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n}$$

ஆனால் a_n, b_n ஐக்கண்டு பிடி.

$f(z) = \sin\ c(z+z^{-1})$ என்பது $z=\infty$, $z=0$ஐ விடுத்து, மற்றெல்லாப் பகுதிகளிலும் பகுமுறைச் சார்பாகும். இதனை, $r \leq z \leq R$ என்னும் கங்கணத்தில் பகுமுறைச் சார்பு எனலாம். இங்கு r மிகச் சிறியதாகவும், R மிகப்பெரியதாகவும் இருக்கலாம். நம் வசதிக்காக $|z| = 1$ என்னும் வட்டத்தை C ஆகக் கொள்வோம்.

$\therefore\ z=e^{i\theta}$; $dz = e^{i\theta}\, i\, d\theta$ ஆகும். லாரன்ஸ் தொடர் வாய்பாடு படி.

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \sin c\,(z+z^{-1}).\ \frac{dz}{z^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{\sin c(e^{i\theta}+e^{-i\theta}).\ e^{i\theta}\,i d\theta.}{e^{i(n+1)\theta}}$$

$$\therefore\ a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(2c\cos\theta)\, e^{-in\theta}\, d\theta.$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(2c\cos\theta).\ \cos n\theta\, d\theta - \frac{1}{2\pi}\,.\ F(\theta)$$

இங்கு $F(\theta) = \int_0^{2\pi} \sin(2c\cos\theta).\ \sin n\theta\, d\theta.$

ஆனால், $F(2\pi-\theta) = -F(\theta).\quad \therefore F(\theta)=0.$

$$\therefore\ a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(2c\cos\theta)\cos n\theta\, d\theta.$$

$$b_n = a_{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(2c\cos\theta)\cos(-n\theta)\, d\theta.$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(2c\cos\theta)\cos n\theta\, d\theta = a_n.$$

மாதிரி 6. C என்பது $|z|=1$ என்ற வட்டம். Cயின் மேலும், உள்ளும் பகுமுறைச் சார்பாக உள்ள $f(z)$ஐ Cயின் மேல் அதன் மதிப்பு

$$\frac{a-\cos\theta}{a^2-2a\cos\theta+1} + i\,\frac{\sin\theta}{a^2-2a\cos\theta+1} \qquad \ldots a > 1$$

என இருக்கும்படி கண்டுபிடி. θ ஆனது zயின் (vectorial angle) ஆரைக் கோணம் ஆகும்.

$f(z)$ ஆனது Cயின் உள்ளே பகுமுறைச் சார்பு என்பது கொள்கை. $\therefore$ மக்லாரின் தேற்றத்தின்படி,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n.$$

இதில் $f^{(n)}(0) = \dfrac{n!}{2\pi i} \displaystyle\int_C \frac{f(z)\,dz}{z^{n+1}}$

$|z| = 1$ என்ற வட்டத்தில் $z = e^{i\theta}$

$$\therefore\ f(z) = \frac{a - \cos\theta + i\sin\theta}{a^2 - 2a\cos\theta + 1}$$

$$= \frac{a - e^{-i\theta}}{a^2 - a\,(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) + 1}$$

$$= \frac{a - z^{-1}}{a^2 - az - az^{-1} + 1}$$

$$= \frac{a - z^{-1}}{(a - z^{-1})\,(a - z)}$$

$$= \frac{1}{a - z}$$

$$\therefore\ f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{1}{a - e^{i\theta}}\, e^{-(n+1)i\theta}\, e^{i\theta}\, i\, d\theta$$

$$= \frac{n!}{2\pi a} \int_0^{2\pi} e^{-ni\theta} \cdot \frac{d\theta}{\left(1 - \dfrac{e^{i\theta}}{a}\right)}$$

$$= \frac{n!}{2\pi a} \int_0^{2\pi} e^{-ni\theta} \left(1 + \frac{e^{i\theta}}{a} + \frac{e^{2i\theta}}{a^2} + \dots\right) d\theta$$

$$= \frac{n!}{a^{n+1}} \quad \text{ஏனெனில், } k \neq 0 \text{ ஆனால் } \int_0^{2\pi} e^{ki\theta}\, d\theta = 0$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{a^{n+1}} = \frac{1}{a} + \frac{z}{a^2} + \frac{z^2}{a^3} + \ldots$$

$$= \frac{1}{a(1-z/a)} = \frac{1}{a-z}.$$

மாதிரி 7: C என்பது $|z| = 1$ என்ற வட்டம். C யின் மேலும், உள்ளும் பகுமுறைச் சார்பாக உள்ள $f(z)$ ஐ C யின் மேல் அதன் மதிப்பு

$$\frac{(a^2-1)\cos\theta + i(a^2+1)\sin\theta}{a^4 - 2a^2\cos 2\theta + 1} \quad \ldots \quad a^2 > 1$$

என இருக்கும்படி கண்டுபிடி. θ ஆனது z யின் ஆரைக்கோணம் ஆகும்.

$f(z)$ ஆனது C யின் உள்ளே பகுமுறைச் சார்பு என்பது கொள்கை. $\therefore$ மக்லாரின் தேற்றத்தின்படி

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

$$\text{இதில் } f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)\,dz}{z^{n+1}}$$

இப்பொழுது $|z| = 1$ என்ற வட்டத்தில்

$$f(z) = \frac{a^2(\cos\theta + i\sin\theta) - (\cos\theta - i\sin\theta)}{a^4 - a^2(e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}) + 1}$$

$$= \frac{a^2 z - z^{-1}}{a^4 - a^2(z^2 + z^{-2}) + 1} = \frac{z}{a^2 - z^2}$$

$$\therefore f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{z}{(a^2 - z^2)} \cdot \frac{1}{z^{n+1}}\, dz$$

$$f^{(n)}(0) = \frac{d^n}{dz^n}\left\{\frac{z}{a^2-z^2}\right\} \quad \ldots \text{ இதில் } z = 0.$$

$$= \frac{d^n}{dz^n}\left\{\frac{1}{2}\frac{1}{(a-z)} - \frac{1}{2}\frac{1}{(a+z)}\right\} z = 0$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{n!}{(a-z)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(a+z)^{n+1}}\right\} z = 0$$

$$= \left.\begin{matrix} 0 \\ n!/a^{n+1} \end{matrix}\right\} \begin{matrix} n \text{ இரட்டையெண் ஆனால்} \\ n \text{ ஒற்றையெண் ஆனால்} \end{matrix}$$

$$\therefore\ f(z) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} z + \frac{f''(0)}{2!} z^2 + \frac{f'''(0)}{3!} z^3 + \ldots$$

$$= \frac{z}{a^2} + \frac{z^3}{a^4} + \frac{z^5}{a^6} + \ldots$$

$$= \frac{z}{a^2}\left(1 + \frac{z^2}{a^2} + \ldots\right) = \frac{z}{a^2}\left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right)^{-1}$$

$$= \frac{z}{a^2-z^2}.$$

மாதிரி 8: C என்பது $|z-a| = r$ என்ற வட்டம். $R > r$. $|z-a| < R$ என்ற வட்டப் பகுதியில் $f(z)$ ஒரு பகுமுறைச் சார்பானால், $0 < r < R$ ஆக இருக்கும்போது

$$f'(a) = \frac{1}{\pi r}\int_0^{2\pi} P(\theta) e^{-i\theta}\, d\theta \text{ என நிறுவி}$$

இதில் $P(\theta)$ ஆனது $f(a + re^{i\theta})$ ன் மெய்ப்பகுதி.

$$\text{மேலும், } \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{\pi r^n}\int_0^{2\pi} P(\theta)\, e^{-in\theta}\, d\theta \text{ ஆகும்.}$$

$|z-a| = r$ என்ற வட்டத்தில் $z = a + re^{i\theta}$ ஆகும்.

$$\therefore\ P(\theta) = \frac{1}{2}\left\{f(a+re^{i\theta}) + \overline{f(a+re^{i\theta})}\right\} \qquad \dots (1)$$

இப்பொழுது, $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (z-a)^m$, டெய்லர் தேற்றம்.

இதில், $a_m = f^{(m)}(a) / m!$

$$\therefore\ f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m r^m e^{im\theta} \qquad \dots (2)$$

$$\overline{f(z)} = \sum_{m=0}^{\infty} \bar{a}_m r^m e^{-im\theta}\ . \qquad \dots (3)$$

$$\therefore\ \int_C \frac{\overline{f(z)}\, dz}{(z-a)^{n+1}} = \int_0^{2\pi} \frac{\Sigma(\bar{a}_m\ r^m\ e^{-im\theta})}{r^{n+1}\quad e^{i(n+1)\theta}} \cdot re^{i\theta} i d\theta$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \bar{a}_m\ r^{m-n}\ i \int_0^{2\pi} e^{-i(m+n)\theta}\ d\theta$$

$$= 0, \text{ ஏனெனில், } \int_0^{2\pi} e^{-i(m+n)\theta}\ d\theta = 0$$

$$\therefore\ \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\overline{f(z)}\ dz}{(z-a)^{n+1}} = 0.$$

ஆனால் $\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_C \frac{f(z)\, dz}{(z-a)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$

இவ்விரண்டையும் கூட்டுக.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{[f(a+re^{i\theta}) + \overline{f(a+re^{i\theta})}]\, re^{i\theta}\, id\theta}{r^{n+1}\, e^{i(n+1)\theta}} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

$$\therefore \quad \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{\pi r^n}\int_0^{2\pi} P(\theta)\cdot e^{-in\theta}\, d\theta$$

மாதிரி 9: $f(z)$ ஆனது zயின் எல்லா முடிவுள்ள மதிப்புகளுக்கும் பகுமுறைச் சார்பாக உள்ளது. மேலும், $|z|$ முடிவிலியை அணுகும் போது $|f(z)| = A.|z|^k\ldots$ (1) ஆனால் $f(z)$ ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவை என்றும் அதன்படி k ஐ விடப் பெரிதல்ல என்றும் நிரூபி.

கொள்கைப்படி, $f(z)$ ஆனது $|z| = R$ என்ற வட்டத்தினுள் பகுமுறைச் சார்பாகும். இவ்வட்டத்தை C எனக் குறிப்போம். மக்லாரின் தேற்றத்தின்படி

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

$$\text{இதில்}\quad a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\, dz}{z^{n+1}}$$

$$|a_n| \leq \left|\frac{1}{2\pi i}\right| \left|\int_0^{2\pi}\frac{f(z).\, Re^{i\theta}\, id\theta}{R^{n+1}\, e^{i(n+1)\theta}}\right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{M}{R^n}\cdot 2\pi = \frac{M}{R^n}$$

இதில் M என்பது $|f(z)|$ ஆனது C யில் பெறும் உச்சமதிப்பு

$$\therefore \quad |a_n| \leq \frac{A\cdot|z|^k}{R^n} = A R^{k-n} \qquad \ldots (1) \text{ ஐப்பார்}$$

$\therefore$ $n>k$ ஆனால் $|a_n| = 0$ ஆகும்.

$\therefore$ $f(z)$ ஆனது ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை என்றும், அதன்படி k ஐ விடப் பெரிதல்ல என்றும் அறிகிறோம்.

மாதிரி 10: $|z| < R$ என்ற வட்டப்பகுதியில், $f(z)$ ஆனது பகுமுறைச் சார்பாக உள்ளது. $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ ஆகவும், $|z| < R$ ஆனால் $|f(z)| < M$ ஆகவும், $r<R$ ஆகவும் இருந்தால்

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_0^\infty |a_n|^2 r^{2n} < M^2$$

என நிரூபி.

$|z| < R$ ஆனால் $f(z)$ ஒரு பகுமுறைச் சார்பு ... கொள்கை

$\therefore$ $|z| = r$, $r < R$ என்ற வட்டத்தில் மக்லாரின் தேற்றத்தின்படி

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n = \sum_0^\infty a_n r^n e^{in\theta}$$

$$\therefore \overline{f(z)} = \sum_0^\infty \bar{a}_n r^n e^{-in\theta}$$

$$|f(z)|^2 = f(z). \overline{f(z)}$$

$$= \sum_{n=0}^\infty a_n r^n e^{in\theta} . \sum_{m=0}^\infty \bar{a}_m r^m e^{-im\theta}$$

$$= \sum_{n=0}^\infty \sum_{m=0}^\infty a_n \bar{a}_m r^{m+n} e^{i(n-m)\theta}$$

$$\therefore \int_0^{2\pi} |f(z)|^2 d\theta = \sum_{n=0}^\infty \sum_{m=0}^\infty a_n \bar{a}_m r^{m+n} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta$$

$$k=0 \text{ ஆனால் } I = \int_0^{2\pi} e^{ik\theta}\, d\theta = 2\pi;\ k\neq 0 \text{ ஆனால் } I=0.$$

$$\therefore \int_0^{2\pi} |f(z)|^2\, d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \bar{a}_n r^{2n}\, 2\pi$$

$$\therefore \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2\, d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

$$\text{இப்பொழுது } \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2\, d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M^2\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} M^2\, 2\pi = M^2$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \leq M^2.$$

மாதிரி 11. பின் வரும் சார்புகளின் சிறப்புப் புள்ளிகளை வகைப்படுத்து:

(i) $z=0$ல் $e^{1/z}$ (ii) $z=\infty$ல் e^z

(iii) $z=0$ல் $\tan(1/z)$ (iv) $z=\infty$ல் $\cot z$

(v) $z=\infty$ ல் $(z-a)^{-2}\,.\,\cot \pi z.$

(vi) $(z-2)\, z^{-2} \sin\{1/(z-1)\}$

(i) $e^{1/z}$ ஆனது $z=0$ஐத் தவிர மற்ற மதிப்புகளுக்குப் பகுமுறைச் சார்பாகும் என்பது தெளிவு. ஆகவே இதன் லாரன்ஸ் தொடரை $\sum_0^{\infty} \frac{1}{z^n.n!}$ என எழுதலாம். ஆகையால் இது தனித்த சாரமான சிறப்புப் புள்ளியாகும்.

(ii) e^z ஐ $z=\infty$ல் ஆராய்வதற்கு, $e^{1/z}$ ஐ $z=0$ல் ஆராய்ந்தால் போதுமானது. ∴ (i) ஐப்பார்.

(iii) $\tan(1/z) = \sin(1/z) \div \cos(1/z)$.

$\cos(1/z) = 0$ ஆனால், துருவங்கள் கிடைக்கும்.

$\therefore \; 2n\pi \pm (\pi/2) = 1/z$.

அல்லது $z = \dfrac{1}{(2n\pm\frac{1}{2})\pi}$ என்பது துருவங்களாகும்.

இதில் $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ போட முடிவிலி துருவங்கள் கிடைக்கும். இவற்றின் எல்லைப் புள்ளியான $z=0$ ஒரு தனித்திராத சாரமான சிறப்புப் புள்ளியாகும்.

(iv) $\cot z = \cos z/\sin z$.

$\sin z=0$ ஆவதற்கு $z=n\pi$ $(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ இவை எளிய துருவங்கள் ஆகும். இவற்றின் எல்லைப்புள்ளி $z=\infty$ என்பது தனித்திராத சாரமான சிறப்புப்புள்ளி.

(v) இச்சார்பின் துருவங்களைக் காண்போம்.

$\sin \pi z = 0$ அல்லது $(z-a)^2 = 0$. ஆகவேண்டும்.

$\sin \pi z=0$ ஆனால் $z=0, \pm 1 \pm 2, \ldots$

இவற்றின் எல்லைப்புள்ளியான $z=\infty$ என்பது தனித்திராத சாரமான சிறப்புப்புள்ளியாகும்.

$(z-a)^2 = 0$ ஆனால் a என்பது 2-தர துருவமாகும்.

(vi) $z = 0$ என்பது 2-தர துருவம் என்பது தெளிவு. பூச்சியங்களைக்காண, $(z-2)\sin\{1/(z-1)\}=0$.

∴ $z=2$ என்பது ஒரு எளிய பூச்சியம்.

அல்லது, $\dfrac{1}{z-1} = n\pi$. $\therefore \; z = \dfrac{1}{n\pi} + 1$

இதில் $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

இவற்றின் எல்லைப்புள்ளி $z=1$, இது ஒரு தனித்த சாரமான சிறப்புப்புள்ளி.

மாதிரி 12: e^{-1/z^2} என்ற சார்பு சிறப்புப் புள்ளிகளற்றது என நிரூபி.

இதன் துருவங்களைக் காணுவதற்கு

$1/e^{-1/z^2} = e^{1/z^2} = 0$ என்று போடு. இத்தகைய z ஐக் கண்டுபிடிக்க முடியாது.

இனி, பூச்சியங்களைக் காண, $e^{-1/z^2} = 0$

$\therefore \quad 1/z^2 = \infty. \qquad \therefore \quad z = 0, 0.$

$\therefore$ $z=0$ என்பது 2-தர பூச்சியம். இதற்கு எல்லைப்புள்ளி கிடையாது. எனவே, சிறப்புப்புள்ளியும் கிடையாது.

பயிற்சி 5

1. பின்வருவன ஒரு சீரான ஒருங்கல் தொடரா? ஆராய்க:

(i) $|z| \geq 2$ ஆனால் $\Sigma \dfrac{1}{1+nz}$

(ii) $|z| \leq 1;$ $\quad \Sigma \dfrac{z^n}{n\sqrt{n+1}}$

(iii) $1 < |z| < 2;$ $\Sigma \dfrac{1}{n^2+z^2}$

(iv) $1 \leq |z| \leq 2;$ $\Sigma \dfrac{1}{n^2+z^2}$

(v) $|z| \leq 1;$ $\Sigma \dfrac{\cos nz}{n^3}$

விடை: (i), (ii), (iii) ஆம். (iv), (v) இல்லை.

2. பின்வருவன எவ்வரங்கில் ஒரு சீராக ஒருங்குகின்றன?

(i) $\Sigma \dfrac{z^n}{3^n+1}$ $\qquad$ (ii) $\Sigma \dfrac{(z-i)^{2n}}{n^2}$

(iii) $\Sigma \dfrac{1}{(n+1)z^n}$ $\qquad$ (iv) $\Sigma \dfrac{\sqrt{n+1}}{n^2+|z|^2}$

விடை: (i) $|z| \leq R<3$ $\qquad$ (ii) $|z-i| \leq 1$

(iii) $|z| \geq R > 1$ (iv) எங்கும்

3. கொடுக்கப்பட்ட அரங்குகளில் $\dfrac{(z-2)(z+2)}{(z+1)(z+4)}$ ஐ விரித்தெழுது: (i) $|z| < 1$ (ii) $1 < |z| < 4$

(iii) $|z| > 4$.

விடை: (i) $1 + \sum\limits_{1}^{\infty} (-1)^{n-1} (1+4^{-n}) z^n$

(ii) $\sum\limits_{1}^{\infty} (-1)^{n+1} 4^{-n} z^n + (-1)^n z^{-n}$

(iii) $1 + \sum\limits_{1}^{\infty} (-1)^n (1+4^n) z^{-n}$

4. $\dfrac{1}{(z-1)(z-3)}$ ஐ (i) $|z| < 1$; (ii) $|z| > 3$

(iii) $1 < |z| < 3$ என்ற அரங்குகளில் விரித்தெழுது.

விடை: (i) $\sum\limits_{0}^{\infty} \frac{1}{2} \{1 - 3^{-(n+1)}\} z^n$

(ii) $\frac{1}{2} \sum\limits_{0}^{\infty} (3^n - 1) z^{-(n+1)}$

(iii) $\dfrac{1}{6} \sum\limits_{0}^{\infty} 3^{-n} z^n - \frac{1}{2} \sum\limits_{1}^{\infty} z^{-(n+1)}$

5. $\dfrac{1}{(z^2+1)(z+2)}$ ஐ (i) $|z| < 1$ (ii) $|z| > 2$

(iii) $1 < |z| < 2$ என்ற அரங்குகளில் விரித்தெழுது.

விடை: (i) $\dfrac{1}{10} \sum\limits_{0}^{\infty} (-1)^n \left(\dfrac{z}{2}\right)^n + \dfrac{1}{5}(2-z) \sum\limits_{0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$

(ii) $\dfrac{1}{5} \sum (-1)^n \left(\dfrac{2}{z}\right)^n$

$+ \dfrac{1}{5} \left(\dfrac{2}{z^2} - \dfrac{1}{z}\right) \sum (-1)^n \dfrac{1}{z^{2n}}$

(iii) $\frac{1}{10} \sum_{0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^n$

$$+ \frac{1}{5} \left(\frac{2}{z^2} - \frac{1}{z}\right) \Sigma (-1)^n \frac{1}{z^{2n}}$$

6. $\frac{z^2-1}{(z+2)(z+3)}$ ஐ (i) $|z| < 2$ (ii) $|z| > 3$.

(iii) $2 < |z| < 3$ என்ற அரங்குகளில் விரித்தெழுது.

விடை: (i) $1 + \sum_{0}^{\infty} (-1)^n \left\{\frac{3}{2^{n+1}} - \frac{8}{3^{n+1}}\right\} z^n$

(ii) $1 + \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{n+1}} (3 . 2^n - 3^n . 8)$

(iii) $1 + \sum_{0}^{\infty} (-1)^n \left\{\frac{3.2^{n-1}}{z^n} - \frac{8 z^n}{3^{n+1}}\right\}$

7. (i) $\frac{2z^3 + 1}{z^2 + z}$ ஐ $0 < |z| < 1$ ல் விரித்தெழுது.

(ii) இச்சார்பை $(z-i)$ ன் அடுக்குகளாக விரித்தெழுது.

விடை: (i) $2(z-1) + z^{-1} + \sum_{0}^{\infty} (-1)^n z^n$

(ii) $2(i-1) + 2(z-i) +$

$$\Sigma (-1)^n (z-i)^n \left\{\frac{1}{i^{n+1}} + \frac{1}{(1+i)^{n+1}}\right\}$$

8. பின்வரும் லாரன்ஸ் தொடர்களைக் கண்டுபிடி.

(i) $0 < |z| < 1$ எனில்

$$\frac{e^z}{z(z^2+1)} = \frac{1}{z} + 1 - \frac{z}{2} - \frac{5z^2}{6} + \ldots$$

(ii) $0 < |z| < \pi$ எனில்

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + \frac{z}{3!} - \left(\frac{1}{5!} - \frac{1}{3!^2}\right) z^3 + \ldots$$

(iii) $0 < |z| < 2\pi$ எனில்

$$\frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \frac{z}{12} - \frac{z^3}{720} + \dots$$

(iv) $|z| > 0$ எனில் $\frac{\sinh z}{z^2} = \frac{1}{z} + \sum_{1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{(2n+1)!}$

(v) $|z| < \infty$ எனில் $z \cosh (z^2) = z + \sum_{1}^{\infty} \frac{z^{4n+1}}{(2n)!}$

9. $|z+1| < 1$ ஆனால் $\frac{1}{z^2} = 1 + \sum_{1}^{\infty} (n+1)\ (z+1)^n$

என்றும், $|z-2| < 2$ ஆனால்

$\frac{1}{z^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sum_{1}^{\infty} (-1)^n (n+1) \left(\frac{z-2}{2}\right)^n$ என்றும் நிருபி.

10. (-1)ல் இருந்து 1 வரை உள்ள, மேல் {கீழ்} அரை வட்ட வழியாக $1/z$ன் தொகையீடானது $-\pi i$ $\{+\pi i\}$ என நிறுவுக.

11. $s_n =$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1,3.5\dots(2n-1)}{2^{m+n}\, m!} \cdot \frac{1,3.5\dots(2m+2n-1)}{(m+n)!} \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

ஆனால், $|a| < |z| < |b|$ என்ற கங்கணத்தில்

$$\left\{\frac{bz}{(z-a)(b-z)}\right\}^{\frac{1}{2}} = s_0 + \sum_{1}^{\infty} s_n \left(\frac{a_n}{z_n} + \frac{z^n}{b^n}\right)$$

என நிருபி.

12. $a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos (n\theta - c \sin \theta)\, d\theta$ ஆனால்,

$$e^{\frac{c}{2}(z-z^{-1})} = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n$$ என நிருபி.

13. $a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos n\theta \cosh(2\cos\theta)\,d\theta$ ஆனால்

$\cosh(z+z^{-1}) = a_0 + \sum_1^{\infty} a_n (z^n+z^{-n})$ என நிரூபி.

14. $a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(n\theta - x\sin\theta)\,d\theta$ ஆனால்

$e^{\frac{x}{2}(z-z^{-1})} = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n$ என நிரூபி.

15. $a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{2\cos\theta} \cdot \cos n\theta\,d\theta$ ஆனால்

$e^{(z+z^{-1})} = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n$ என நிரூபி.

16. $P(\theta) = \cos\{\lambda\sin\theta(1-\cos\theta) - n\theta\}$ ஆகவும்

$a_n = \frac{e^{-\lambda/2}}{2\pi\lambda^n}\int_0^{2\pi} e^{\lambda(\cos\theta + \cos^2\theta)} \cdot P(\theta)\,d\theta$ ஆகவும்

இருந்தால் $exp\left(z + \frac{\lambda^2}{2z^2}\right) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n$

17. $a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{(u+v)\cos\theta} \cdot \cos\{(v-u)\sin\theta - n\theta\}\,d\theta$

$b_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{(u+v)\cos\theta} \cdot \cos\{(u-v)\sin\theta - n\theta\}\,d\theta$ ஆனால்,

$exp\left(\frac{u}{z} + vz\right) = \sum_0^{\infty} a_n z^n + \sum_1^{\infty} b_n z^{-n}$

18. $|z|<\infty$ எனில் (i) $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots$

(ii) $\sin z =$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{1 + \left(z - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^2}{2!} - \frac{\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^3}{3!} + \cdots\right\}$$

19. $f(z) = \cos z$ ஆகவும், $a_n = \frac{f^{(n)}(\pi/2)}{n!}$ ஆகவும்

இருந்தால் $f(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n (z-\pi/2)^n$ என நிரூபி.

20. $|z|<R$ ஆக இருக்கும்போது $f(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n z^n$.

$|z|=r$ என்ற வட்டத்தில் $|f(z)|$ ன் உச்சவரம்பு $M(r)$ ஆகும்.
$r<R$ எனில், n ன் எல்லா மதிப்புக்கும்

$|a_n| r^n \leq M(r)$ என நிரூபி.

21. பின்வரும் சார்புகளின் சிறப்புப்புள்ளிகளை வகைப் படுத்து: (குறிப்பு:- அ = தனித்த சாரமான சிறப்புப்புள்ளி; ஆ = தனித்திராத சாரமான சிறப்புப்புள்ளி; இ = எளிய துருவம். ஈ = இரண்டாந்தர பூச்சியம்)

	சார்பு		புள்ளி		விடை
(1)	$\sin(1/z)$	...	$z=0$	...	அ
(2)	$\operatorname{cosec}(1/z)$	...	$z=0$	...	ஆ
(3)	$\sin[1/(1-z)]$	...	$z=1$	...	அ
(4)	$(z^2+4)/e^z$	...	$z=\infty$	...	அ
(5)	$(1-e^z)/(1+e^z)$	...	$z=\infty$	...	ஆ
(6)	$\sin z - \cos z$	...	$z=\infty$	...	அ
(7)	$1/(\sin z - \cos z)$	...	$z=\pi/4$	...	இ
(8)	$e^{c/(z-a)} \div \{e^{z/a} - 1\}$	...	$z=a$	...	அ
(9)	$\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{(1+2^{2n}z^2)}$	...	$z=0$		ஆ
			$z=\infty$	...	ஈ
(10)	$e^z/(z \sin mz)$	...	$z=n\pi/m$	...	இ
			$z=\infty$	...	ஆ

5. எச்சத் தேற்றத்தால் தொகை காணல்

5·1 $f(z)$ ன் எச்சம்.

4.26 (4)ஐ நினைவூட்டுகிறோம். C என்பது $|z-a| = r$ என்ற வட்டம். இதன் மேலும், உள்ளும் $f(z)$ ஆனது பகுமுறைச் சார்பாக இருந்தால், $f(z)$ஐ லாரன்ஸ் தொடராக எழுதலாம்.

$$\text{அதாவது, } f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

$$\therefore \int_C f(z)\,dz = \int_C \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n\,dz.$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} a_n \int_C (z-a)^n\,dz \ldots (1)$$

$z-a = re^{i\theta}$ என்றும், θ ஆனது 0ல் இருந்து 2π வரை மாறுகிறது எனவும் அறிவோம்.

$$\therefore \int_C (z-a)^n\,dz = \int_0^{2\pi} r^n\, e^{in\theta} \,.\, r.e^{i\theta}\, i d\theta$$

$$= ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{(n+1)i\theta}\,d\theta$$

$$= \frac{r^{n+1}}{n+1} \left\{ e^{(n+1)i\theta} \right\}_0^{2\pi} \ldots\ldots(2)$$

$= 0$, ($n \neq -1$ ஆனால்) $\therefore$ (1)ல் இருந்து,

$$\int_C f(z)\,dz = a_{-1}\int_C \frac{dz}{z-a}$$

$$= a_{-1}\int_0^{2\pi} \frac{r\,e^{i\theta}\,i\,d\theta}{r\,e^{i\theta}}$$

$$\therefore\ \int_C f(z)\,dz = 2\pi i\,a_{-1}.$$

இத் தொகையீட்டுக்குப்பின் a_{-1} மட்டுமே எஞ்சியிருப்பதால், a_{-1}ஐ $z=a$ என்ற புள்ளியில் $f(z)$யின் எச்சம் என்று சொல்வோம்.

குறிப்பு. இதனை $a_n = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}}$ என்ற வாய்பாட்டில் $n = -1$ என பிரதியிட்டும் பெறலாம்.

5·2. எச்சத்தைக் கண்டுபிடிக்கும் முறை.

5.1ல் இருந்து, லாரன்ஸ் தொடரைக் கண்டு பிடித்தால் தான், a_{-1} என்ற எச்சத்தைக் கண்டு பிடிக்க முடியும் என எண்ண இடமுண்டு. ஆனால், சில குறிப்பிட்ட சார்புகளில் சில சுருக்க வழிகளைப் பயன்படுத்தலாம். எடுத்துக்காட்டாக, $z=a$ என்பது n-தர துருவமானால்,

$$a_{-1} = \lim_{z\to a} \frac{1}{(n-1)!}\,\frac{d^{\,n-1}}{dz^{n-1}}\{(z-a)^n f(z)\}$$

(இங்கு lim என்பதற்குப் பதிலாக "எல்லை" என அச்சிடப்பட்டுள்ளது.)

ஆகும். ஏனெனில்

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{a_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-a}$$

$$+ a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \dots$$

$$\therefore\ (z-a)^n f(z) = a_{-n} + a_{-n+1}(z-a) + \dots$$

$$+ a_{-1}(z-a)^{n-1} + a_0(z-a)^n + \dots \quad (1)$$

(1)ன் இடது பக்கத்திலுள்ள பகுமுறைச் சார்பின் டெய்லர் தொடர் ஆனது வலப்பக்கத்தில் உள்ளது. ∴ 4·24 டெய்லர் தேற்றத்தின்படி $(z-a)^{n-1}$ ன் கெழுவைக் காண்போமானால்

$$a_{-1} = \frac{1}{(n-1)!}\,\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\{(z-a)^n f(z)\}\Big|_{z=a}$$

என கிடைக்கிறது.

கிளைத் தேற்றம் $n=1$ ஆனால், (அதாவது $z=a$ என்பது எளிய துருவமானால்)

$$a_{-1} = \underset{z \to a}{\text{எல்லை}} \{(z-a)\, f(z)\} \text{ ஆகும்.}$$

குறிப்பு: (1)ன் இரு பக்கங்களுக்கும் $(n-1)$ ஆவது வகைக் கெழுவைக் கண்டு பிடித்து, அதில் $z=a$ என்று போட்டும் a_{-1} ஐக் கண்டு பிடிக்கலாம்.

பயிற்சி: பின் வரும் சார்புகளின் எச்சங்களைக் கண்டுபிடி:

(i) $z=0$ல் $e^{-1/z}$ (ii) $z=i\pi$ல் $\dfrac{e^{az}}{1+e^z}$

(iii) $z=ia$ல் $\dfrac{1}{(z^2+a^2)^2}$ (iv) $z=\pm n\pi$ ல் $\dfrac{e^z}{\sin^2 z}$

(i) $$e^{-1/z} = 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{2!}\ \frac{1}{z^2} - \ldots$$

$$\therefore\ a_{-1} = (1/z)\text{ன் கெழு} = -1.$$

(ii) $1+e^z=0$ ஆனால் $e^z = -1 = e^{(2n+1)\pi i}$

$\therefore$ $z=i\pi$ என்பது $1+e^z$ என்பதன் எளிய பூச்சியம்.

$\therefore$ $z=i\pi$ என்பது $e^{az}/(1+e^z)$ன் எளிய துருவம்.

$$\therefore\ a_{-1} = \underset{z \to i\pi}{\text{எல்லை}} \frac{\{(z-i\pi)\, e^{az}\}}{(1+e^z)}$$

$$= e^{a\pi i} \underset{z \to i\pi}{\text{எல்லை}} \left\{\frac{z-i\pi}{1+e^z}\right\}$$

$$= e^{a\pi i} \times \underset{z \to i\pi}{\text{எல்லை}} \left\{\frac{1}{e^z}\right\}$$

$$= \frac{e^{a\pi i}}{e^{\pi i}} = -e^{a\pi i}$$

(iii) $z = ia$ என்பது 2-தர துருவம் என்பதைக் கவனி.

$$\therefore\ a_{-1} = \frac{1}{1!}\ \frac{d}{dz}\ \{(z-a)^2\ f(z)\}\ \ldots \text{ வாய்பாடு}$$

$$= \frac{d}{dz}\ \left\{(z-ia)^2 .\ \frac{1}{(z^2+a^2)^2}\right\}_{z\,=\,ia}$$

$$= \frac{d}{dz}\left\{\frac{1}{(z+ai)^2}\right\}\quad z = ia$$

$$= -2\,(z+ai)^{-3}\ \ldots\ z = ai$$

$$= -2.\ \frac{1}{8a^3i^3} = \frac{-i}{4a^3}$$

(iv) $\dfrac{e^z}{\sin^2 z}$ ஐ லாரன்ஸ் தொடராக $(z-n\pi)$ ன் அடுக்குகளாக விரித்தெழுதி $1/(z-n\pi)$ ன் கெழுவைக் காண்போம்.

$z-n\pi = u$ எனப் பிரதியிடு.

இப்போது, $e^{u+n\pi}\ \operatorname{cosec}^2 u$-ஐ u-ன் அடுக்குகளாக விரித்து $1/u$-ன் கெழுவைக் காண்போம்.

$$\frac{e^{u+n\pi}}{\sin^2 u} = \frac{e^{n\pi}\left\{1+u+\dfrac{u^2}{2!}+\ldots\right\}}{u^2\left\{1-\dfrac{u^2}{6}+\ldots\right\}^2}$$

$$= \frac{e^{n\pi}\left\{1+u+\dfrac{u^2}{2!}+\ldots\right\}}{u^2\left\{1-\dfrac{u^2}{3}+\ldots\right\}}$$

$$= e^{n\pi}\left\{\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u}+\ldots\right\}$$

$$\therefore\ a_{-1} = e^{n\pi}.$$

5·3. எச்சத்தேற்றம்:

$f(z)$ ஆனது, C என்ற எளிய அடைத்த கோட்டின் மேலும் உள்ளும் $a,\ b,\ c,\ \ldots$ என்ற முடிவுள்ள எண்ணிக்கையுள்ள

புள்ளிகளை விடுத்து—பகுமுறைத் தொடர்பாக உள்ளது. இப் புள்ளிகளில் $f(z)$ ன் எச்சங்கள் முறையே $a_{-1}, b_{-1}, \ldots$) ஆனால்

$$\int_C f(z)\, dz = 2\pi i\,(a_{-1} + b_{-1} + \ldots)$$

நிருபணம்:

$a, b, \ldots$ என்ற புள்ளிகள் C-யின் உள்ளே இருப்பதால், இவற்றை மையமாகக் கொண்டு $C_1, C_2, \ldots$ என்ற வட்டங்களை ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொள்ளாதவாறும், C-யின் உள்ளே இருக்கும்படியும் வரைய முடியும். 4·7 தேற்றத்தின்படி,

$$\int_C f(z)\, dz = \int_{C_1} f(z)\, dz + \int_{C_2} f(z)\, dz + \ldots + \int_{C_n} f(z)\, dz$$

ஆனால் 5·1 படி $\int_{C_1} f(z)\, dz = 2\pi i\, a_{-1}$

$$\therefore \int_C f(z)\, dz = 2\pi i\,(a_{-1} + b_{-1} + \ldots)$$

$$= 2\pi i \text{ (எச்சங்களின் தொகை.)}$$

குறிப்பு: a என்ற ஒரே புள்ளியில் $f(z)$ பகுமுறைச் சார்பாக இல்லாவிடில் $\int_C f(z)\, dz = 2\pi i\, a_{-1}$. இது 5·1 ஆகும்.

5·4. முடிவிலியில் எச்சம்:

$f(z)$ ஆனது முடிவிலியில் ஒரு துருவத்தை உடையதாய் இருந்தால், $z = \infty$ ல் $f(z)$-ன் எச்சத்தை $-\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C f(z)\, dz$ என வரையறை செய்வோம். இதில் C என்ற அடைத்த வளை கோடானது $f(z)$ யின் மற்றெல்லா (முடிவுள்ள எண்ணிக்கை உள்ள) துருவங்களையும் தன் உள்ளே கொண்டதாய் இருக்கும். இப்பொழுது Cஐ அதற்கு வெளியே உள்ள பகுதியைத் தன் இடப் புறம் இருக்கும்படி வலஞ்சுழியாகச் சுற்றும் வரம்புக்கோடு எனக் கருதலாம்!

இப்பொழுது 5·3 ஐ உபயோகித்து

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\, dz = \text{(எச்சங்களின் தொகை,)}$$

$$\therefore \; -\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz = -\text{ (எச்சங்களின் தொகை)}$$

$$\text{முடிவிலியில் எச்சம்} = -\text{ (எச்சங்களின் தொகை)}$$

$\therefore$ எச்சங்களின் தொகை + முடிவிலியில் எச்சம் $= 0$. இதனை,

$f(z)$ என்ற பகுமுறைச் சார்பு, முடிவிலியில் உள்ள துருவத்தைச் சேர்த்து, முடிவுள்ள எண்ணிக்கை உள்ள துருவங்களை உடையதாயிருந்தால், அவற்றின் எச்சத் தொகை பூச்சியமாகும்.

5·5. தேற்றம்: $f(z)$ ஆனது $z=\infty$ல் துருவத்தை உடையதாய் இருந்தால், ∞ யில் $f(z)$ யின் எச்சமானது, ∞யின் சுற்றுப்புறத்தில் $f(z)$ஐ விரித்தெழுத கிடைக்கும் $(-1/z)$ன் கெழுவாகும்,

நிருபணம் :

$f(z)$ ஆனது ∞யில் m-தர துருவம் உடையதானல் (4·40 ஐப்பார்)

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{m} a_n z^n \text{ ஆகும்.} \qquad \ldots \qquad (1)$$

$$\therefore \; \infty \text{ யில் உள்ள எச்சம்} = -\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz \qquad (5\cdot4)$$

$f(z)$ ஐத் தொகையீடு செய்ய, ஒரே உறுப்புதான் பூச்சியமாகாது. {5·1ல் (2) ஐப்பார்}.

$$\therefore \; \infty \text{ யில் உள்ள எச்சம்} = -\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{a_{-1}}{z}\,dz.$$

$$= -a_{-1}.$$

குறிப்பு: $f(z)$ ஆனது $z=\infty$ யில் பகுமுறைச் சார்பாக இருந்தாலும், அதாவது, $a_1=a_2=\ldots=a_m=0$ ஆக இருந்தாலும், அங்கு எச்சம் $=-a_{-1}$ உண்டு என்பதை நோக்குக. $\therefore$ a_0உம் பூச்சியமானல்

$$-a_{-1} = -\lim_{z\to\infty}\{z \cdot f(z)\} \qquad \ldots \qquad (2)$$

(இங்கு $\lim$ = எல்லை)

என்பது (1)ல் இருந்து கொள்ளத்தக்கது.

மாதிரி 1: $\dfrac{z^2}{(z-1)(z-2)}$ என்ற சார்பின் எச்சங்களை அதன் துருவங்களான 1, 2, விலும், மற்றும் ∞யிலும் கண்டுபிடித்து அதன் தொகை 0 என நிரூபிப்போம்.

$$(z=1\text{ல் உள்ள எச்சம்}) = \underset{z\to 1}{\text{எல்லை}} \{(z-1)\, f(z)\}$$

$$= \underset{z\to 1}{\text{எல்லை}} \frac{(z-1)\,.\,z^2}{(z-1)(z-2)} = -1.$$

$$(z=2\text{ல் எச்சம்}) = \underset{z\to 2}{\text{எல்லை}} \left\{ (z-2)\,.\,\frac{z^2}{(z-1)(z-2)} \right\} = 4.$$

இப்போது $\underset{z\to\infty}{\text{எல்லை}} \{-z\, f(z)\}$ ஐக் கண்டுபிடிக்க இயலாது.

$$\therefore\ f(z) = \left(1-\frac{1}{z}\right)^{-1} \left(1-\frac{2}{z}\right)^{-1}$$

$$= \left(1+\frac{1}{z}+\cdots\right)\left(1+\frac{2}{z}+\cdots\right)$$

$$= 1+\frac{3}{z}+\cdots$$

இதில் $\left(-\dfrac{1}{z}\right)$ன் கெழுவானது -3 ஆகும். இதுவே ∞ யில் $f(z)$ யின் எச்சம்.

எச்சங்களின் தொகை $= -1+4+(-3) = 0.$

குறிப்பு: ∞யில் இது ஒரு பகுமுறைச் சார்பு என்பதை நோக்குக.

மாதிரி 2: $f(z) = z/\{(z-a)(z-b)\}$ ஆனால் ∞யில் இதன் எச்சம் -1 என நிரூபி.

$$\underset{z\to\infty}{\text{எல்லை}} \left\{ -z\, f(z) \right\} = -1 \text{ என்பது தெளிவு.}$$

$\therefore\ z=\infty$ல் $f(z)$ன் எச்சம் $-1.$

5·6. தேற்றம்: $|z-a| = r$ என்ற வட்டத்தில், AB என்னும் வில்லை $\alpha < \theta < \beta$ என்றவாறு எடுத்துக்கொள். $\underset{z \to a}{\text{எல்லை}} (z-a) f(z)$ $= k$ என்ற மாறிலியானுல் $\underset{r \to 0}{\text{எல்லை}} \int_{AB} f(z) dz = i(\beta - \alpha) k$ ஆகும்.

நிருபணம்:

கொள்கைப்படி, $|z-a| < \delta$ ஆனுல் $|(z-a)f(z) - k|$ $< \varepsilon$ என்றவாறு δ உண்டு. ஆனுல் $|z-a| = r$.

$\therefore$ $r < \delta$ ஆக எடுத்துக்கொள்.

$\therefore$ $(z-a)f(z) = k + \eta$ என்பதில் $|\eta| < \varepsilon$

இப்பொழுது, $\int_{AB} f(z)\, dz = \int_{AB} \frac{f(z).(z-a)\, dz}{(z-a)}$

$$= \int_{AB} \frac{k+\eta}{z-a}\, dz$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{k+\eta}{re^{i\theta}}\, re^{i\theta}\, i\, d\theta$$

$$= i k \int_{\alpha}^{\beta} d\theta + i \int_{\alpha}^{\beta} \eta\, d\theta \leq i k (\beta - \alpha) + i \varepsilon (\beta - \alpha)$$

$= i k (\beta - \alpha) + 0 \ldots,$ ஏனெனில் $\varepsilon \to 0$

5·7. தேற்றம்: $|z| = R$ என்ற வட்டத்தில், AB என்னும் வில்லை $\alpha < \theta < \beta$ என்றவாறு எடுத்துக்கொள்.

$\underset{R \to \infty}{\text{எல்லை}}$ $z f(z) = k$ என்ற மாறிலியானுல்

$\underset{R \to \infty}{\text{எல்லை}} \int_{AB} f(z)\, dz = i(\beta - \alpha) k$ ஆகும்.

நிருபணம்:

$|z f(z) - k| < \varepsilon$ என்றவாறு R ஐ எடுத்துக்கொள்ள இயலும்.

$$\therefore \quad z f(z) = k+\eta \text{ ஆனால், } |\eta| < \varepsilon \text{ ஆகும்}$$

இப்பொழுது, $\displaystyle\int_{AB} f(z)\, dz = \int_{AB} \frac{z f(z)\, dz}{z}$

$$= \int_{AB} \frac{k+\eta}{z}\, dz = \int_{a}^{\beta} \frac{k+\eta}{Re^{i\theta}}\, Re^{i\theta}\, i\, d\theta$$

$$= ik(\beta-a) + i\int_{a}^{\beta} \eta\, d\theta$$

$$\lessapprox ik(\beta-a) + i\varepsilon(\beta-a)$$

$= ik(\beta-a)$, ஏனெனில் $\varepsilon \to 0$

குறிப்பு: $z=a$ என்பது $f(z)$ன் எளிய துருவமானால், k ஆனது $z=a$ல் $f(z)$ன் எச்சமாகும்.

5·8. $F(x)$ ஒரு விகிதமுறு சார்பானல் $\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\, dx$ ஐக் கண்டு பிடிக்கும் முறை.

[$F(x) = F(-x)$ ஆனல் (அதாவது $F(x)$ இரட்டைச் சார்பானல்) இது $2\int_{0}^{\infty} F(x)\, dx$ ஆகும்]

ஆதியை மையமாகவும், $2R$ ஐ விட்டமாகவும் கொண்ட மேல் அரைவட்டத்தை C என்ற அடைத்த வளைகோடு எனக் குறிப்போம். இதில் உள்ள வில் பகுதியான அரைவட்டத்தை Γ என்று குறிப்போம். $k>1$ ஆகவும், M ஒரு மாறிலியாகவும் இருக்கட்டும். $z=Re^{i\theta}$ ஆக இருக்கும்போது,

$$|F(z)| \le \frac{M}{R^k} \text{ ஆனல் } \lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma} F(z)\, dz = 0$$

என நிரூபிப்போம்.

$$\left| \int_{\Gamma} F(z)\, dz \right| \le \left| \int_{0}^{\pi} F(Re^{i\theta})\, Re^{i\theta}\, i\, d\theta \right|$$

$$\le \frac{M}{R^k} \cdot R \cdot 1 \cdot \pi = \frac{\pi M}{R^{k-1}}$$

$R \to \infty$ ஆனதால், $\int_{\Gamma} F(z)\, dz \to 0$

இப்பொழுது $\int_{C} F(z)\, dz = 2\pi i$ (எச்சங்களின் தொகை)

$$\int_{-R}^{R} F(x)\, dx + \int_{\Gamma} F(z)\, dz = 2\pi i \text{ (எச்சங்களின் தொகை)}$$

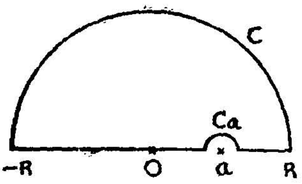
$R \to \infty$ ஆனதால் $\int_{\Gamma} F(z)\, dz = 0$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\, dx = 2\pi i \text{ (எச்சங்களின் தொகை)}$$

குறிப்பு 1: நாம் எடுத்துக் கொண்ட C என்ற வளைகோட்டில், மெய்யச்சு ஒரு பகுதியாகும். எனவே, மெய்யச்சில் துருவம் இருக்கக் கூடாது.

குறிப்பு 2: நாம் மேல் அரைவட்டத்தை எடுத்துகொண்டோமாகையால், மேல் தளத்திலுள்ள எச்சங்களின் தொகையை மட்டும் கணக்கிடவேண்டும்.

குறிப்பு 3: $F(z)$ என்ற சார்பில் மெய்யச்சில் எளிய துருவங்கள் இருந்தால் என்ன சங்கடம் ஏற்படும்? காஷியின் எச்சத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்த முடியாது. இதனைச் சமாளிப்பது எங்ஙனம்? படத்தில் காட்டியபடி, நெளிசல்கள் உள்ள அடைத்த வளைகோடுகளால் இத்துருவங்களைத் தவிர்க்கலாம்.



படம்—14

C_a என்பது a ஐச் சுற்றிச் செல்லும் ஒரு அரைவட்டம். இதன் மையம் a. ஆரமோ, கழிநுண் (மிகச்சிறிய, infinitesimal) ஆரமாகும்.

$\therefore$ 5·6. தேற்றப்படி,

$$\int_{C_a} F(z)\,dz = \pi i \times (a\text{யில் உள்ள எச்சம்})$$

ஆகவே, பொது விதியாக,

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(z)\,dz = 2\pi i \times (\text{மேல் தளத்திலுள்ள எச்சங்களின் தொகை})$$

$$+\ \pi i \times (\text{மெய்யச்சிலுள்ள எச்சங்களின் தொகை})$$

$$= 2\pi i\, R^{+} + \pi i\, R^{o}$$

என எழுதலாம்.

மாதிரி 1 $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ என நிரூபி.

$z = R\,e^{i\theta}$ என்று பிரதியிடு.

$$|F(z)| = \left| \frac{1}{1+R^4\,e^{i4\theta}} \right| \leq \frac{1}{R^4-1} \leq \frac{2}{R^4}$$

$$\therefore \int_{\Gamma} F(z)\,dz = 0.$$

இனி, $F(z)$ன் துருவங்களைக் காண்போம்.

$$z = (-1)^{1/4}$$

$$= \{\cos(2k\pi+\pi) + i\sin(2k\pi+\pi)\}^{1/4}.$$

$$= e^{i(2k+1)\pi/4},\quad k = 0, 1, 2, 3.$$

இவற்றில் $e^{i\pi/4}$ உம், $e^{i3\pi/4}$ உம் தான் Cயின் உட்புறம் உள்ளவை.

$$e^{i\pi/4}\text{ எச்சம்} = \underset{z\to e^{i\pi/4}}{\text{எல்லை}} \left\{ (z - e^{i\pi/4}) \cdot \frac{1}{(1+z^4)} \right\}$$

$$= \underset{z\to e^{i\pi/4}}{\text{எல்லை}} \frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4}\, e^{-3i\pi/4}$$

இதே மாதிரி $e^{3i\pi/4}$ ல் எச்சம் $= \frac{1}{4} e^{-9i\pi/4}$

$$\int_C \frac{dz}{1+z^4} = 2\pi i \left\{ \frac{e^{-3i\pi/4} + e^{-9i\pi/4}}{4} \right\}$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} + \int_\Gamma \frac{dz}{1+z^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore 2\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} + 0 = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} .$$

மாதிரி 2: $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{4}$

$F(z) =$

$$\frac{1}{(1+z^2)^2} \leq \frac{1}{(|z|^2-1)^2} \leq \left(\frac{2}{|z^2|}\right)^2 \leq \frac{4}{R^4}$$

இதில் $M=4$; $k=4>1$. $\therefore \int_\Gamma F(z)\, dz = 0$.

இதன் துருவங்கள் $z=\pm i$. இவை 2-தரமானவை. இதில் $z=i$ மட்டும்தான் Cயின் உட்புறம் உள்ளது.

$$z=i\text{ல் எச்சம்} = \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\left\{\frac{(z-i)^2 \cdot 1}{(1+z^2)^2}\right\}$$

$$= \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\left\{\frac{1}{(z+i)^2}\right\} = \lim_{z\to i} -2\,(z+i)^{-3}$$

$$= -2/8i^3 = -i/4.$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\, dx + \int_\Gamma F(z)\, dz = 2\pi i\,(-i/4)$$

$$\therefore 2\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} + 0 = \pi/2$$

$$\therefore \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \pi/4$$

5·9. $\int_0^{2\pi} F(\sin\theta, \cos\theta)\, d\theta$ ஐக் கண்டுபிடித்தல்.

[$F(\sin\theta, \cos\theta)$ என்பது $\sin\theta$, $\cos\theta$-க்களின் விகிதமுறு சார்பு]

C என்பது ஆதியை மையமாகவும், அலகை ஆரமாகவும் உடைய வட்டமாக இருக்கட்டும். இவ் வட்டத்தில்,

$z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ ஆகும்.

$$z^{-1} = e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

$$\therefore \cos\theta = (z+z^{-1})/2 \; ; \; \sin\theta = (z-z^{-1})/2i$$

$$dz = e^{i\theta}\, i d\theta = iz d\theta$$

$$\therefore \int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta =$$

$$\int_C F\left\{(z+z^{-1})/2, \quad (z-z^{-1})/2i\right\} dz/iz$$

மாதிரி 1 :

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3-2\cos\theta + \sin\theta}$$

$$\int_C \frac{dz}{iz} \cdot \frac{1}{\left\{3-\frac{2(z+z^{-1})}{2} + \frac{(z-z^{-1})}{2i}\right\}}$$

$$= \int_C \frac{2dz}{(1-2i)z^2 + 6iz-(1+2i)}$$

இதன் துருவங்களைக் காண்போம்.

$$(1-2i)z^2 + 6iz - (1+2i) = 0$$

$$\therefore \quad z = \{-6i \pm \sqrt{-36 + 4(1-2i)(1+2i)}\} \div 2(1-2i)$$

$$= \{-6i \pm \sqrt{-36 + 4(1+4)}\} \div 2(1-2i)$$

$$= (-6i \pm 4i) \div 2(1-2i)$$

$= 2-i$ அல்லது $(2-i)/5$. C என்பது $|z| = 1$

$\therefore$ இதில் $(2-i)/5$ என்ற துருவம்தான் Cயின் உட்புறம் உள்ளது. இதில் உள்ள எச்சமானது,

$$\underset{z\to(2-i)/5}{\text{எல்லை}} \left\{z - \frac{(2-i)}{5}\right\} \left\{\frac{2}{(1-2i)z^2+6iz-(1+2i)}\right\}$$

$$= \underset{z\to(2-i)/5}{\text{எல்லை}} \left\{\frac{2}{(1-2i)[z-(2-i)]}\right\}$$

$$= \frac{2}{(1-2i)(2-i)(-4/5)} = \frac{-5}{2(-5i)} = \frac{1}{2i}$$

$$\therefore \int_C F(z)\,dz = 2\pi i/2i = \pi.$$

மாதிரி 2: $a > 0$ ஆனால்,

$$I = \int_0^\pi \frac{a\,d\theta}{a^2+\cos^2\theta} = \frac{\pi}{\sqrt{1+a^2}}$$

$$I = \int_0^\pi \frac{2a\,d\theta}{2a^2+1+\cos 2\theta},$$ இதில் $\phi = 2\theta$ ஆனால்

$$= \int_0^{2\pi} \frac{a\,d\phi}{2a^2+1+\cos\phi}$$

$$= a\int_C \frac{dz}{iz\{2a^2+1+(z+z^{-1})/2\}}$$

இதில் C என்பது அலகு வட்டம்.

$$I = \frac{2a}{i} \int_C \frac{dz}{z^2 + 2(1+2a^2)z+1}$$

இங்கு $F(z) = 1/\{z^2+2(1+2a^2)z+1\}$ என்பதன் துருவங்கள் $-(1+2a^2) \pm 2a\sqrt{1+a^2} = p, q$ ஆக இருக்கட்டும். $a>0$. $\therefore$ C என்ற அலகு வட்டத்தின் உட்புறம் p மட்டும்தான் இருக்கும். p-யில் $F(z)$-ன் எச்சம் $= \underset{z\to p}{\text{எல்லை}} (z-p)F(z)$

$$= \underset{z\to p}{\text{எல்லை}} \frac{(z-p)}{(z-p)(z-q)} = \frac{1}{p-q} = \frac{1}{4a\sqrt{1+a^2}}$$

$$\therefore \int_C F(z)\,dz = 2\pi i/4a\sqrt{1+a^2}$$

$$\therefore I = \frac{2a}{i} \cdot \frac{2\pi i}{4a\sqrt{1+a^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{1+a^2}}$$

மாதிரி 3: $0 < p < 1$ ஆனால்,

$$I \equiv \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\theta\, d\theta}{1-2p\cos 2\theta + p^2} = \frac{\pi(1-p+p^2)}{1-p}$$

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{(1+\cos 6\theta)\, d\theta}{1-2p\cos 2\theta + p^2}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{(1+e^{i6\theta})\, d\theta}{1-p(e^{i2\theta}+e^{-i2\theta})+p^2}$$ -ன் மெய்ப்பகுதி

(R. P.) யாகும். மேலும் C என்பது $|z| = 1$ என்ற வட்டமாதலின் $z=e^{i\theta}$ எனக் கொள்வோம்.

$$I = R.P.\ \frac{1}{2} \int_C \frac{(1+z^6)}{\{1-p(z^2+z^{-2})+p^2\}} \cdot \frac{dz}{iz}$$

$$= R.P. \frac{1}{2i} \int_C \frac{z(1+z^6)\,dz}{z^2 - pz^4 - p + p^2z^2}$$

$$= R.P. \frac{1}{2i} \int_C \frac{z(1+z^6)\,dz}{(1-pz^2)(z^2-p)}$$

இதில் $\pm\sqrt{p}$; $\pm 1/\sqrt{p}$ ஆகியவை துருவங்கள். $p<1$ ஆனதால் $\pm\sqrt{p}$ மட்டுமே Cயின் உட்புறம் இருக்கும்.

$$(z=\sqrt{p}\text{-ல் எச்சம்}) = \underset{z\to\sqrt{p}}{\text{எல்லை}} \; (z-\sqrt{p})\,F(z)$$

$$= \underset{z\to\sqrt{p}}{\text{எல்லை}} \; \frac{(z-\sqrt{p})\,z(1+z^6)}{(z-\sqrt{p})(z+\sqrt{p})(1-pz^2)}$$

$$= \frac{\sqrt{p}\,(1+p^3)}{2\sqrt{p}\,(1-p^2)} = \frac{1+p^3}{2(1-p^2)}$$

இதேவிதமாக, $-\sqrt{p}$-ல் எச்சம் $= (1+p^3)/2(1-p^2)$

$$\therefore \int_C F(z)\,dz = 2\pi i \text{ (எச்சங்களின் தொகை)}$$

$$= 2\pi i \left\{ \frac{1+p^3}{2(1-p^2)} + \frac{1+p^3}{2(1-p^2)} \right\}$$

$$= \frac{2\pi i\,(1+p^3)}{(1-p^2)}$$

$$\therefore I = R.P. \frac{1}{2i} \; \frac{2\pi i\,(1+p)(1-p+p^2)}{(1+p)(1-p)}$$

$$= \pi(1-p+p^2)/(1-p)$$

மாதிரி 4: $I = \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} . \cos(\sin\theta - n\theta)\,d\theta = \frac{2\pi}{n!}$

$I = \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} . e^{i(\sin\theta - n\theta)}\,d\theta$-ன் மெய்ப்பகுதி (R. P.)

$$= R.P. \int_0^{2\pi} \exp.(\cos\theta + i\sin\theta - in\theta)\,d\theta$$

$$= R.P. \int_0^{2\pi} \exp.(e^{i\theta}) \; . \; \exp.(-in\theta) \; . \; d\theta$$

$$= R.P. \int_0^{2\pi} \exp.(e^{i\theta}) \; . \; \{\exp.(i\theta)\}^{-n} \; d\theta.$$

$$= R.P. \int_C e^z \; . \; z^{-n} \; \frac{dz}{iz}$$

இதில் C என்பது அலகு வட்டம்.

$$\therefore \; I = \frac{1}{i} \int_C \frac{e^z \, dz}{z^{n+1}} \text{-ன் மெய்ப் பகுதி}$$

இதில் $z=0$ என்பது $(n+1)$-தர துருவம்.

இதில் $F(z)$-ன் எச்சமானது,

$$\text{எல்லை}_{z \to 0} \; \frac{1}{n!} \; \frac{d^n \; e^z}{dz^n}$$

$$= \frac{1}{n!}$$

$$\therefore \int_C F(z) \, dz = 2\pi i \times \frac{1}{n!}$$

$$\therefore I = \frac{1}{i} \; \frac{2\pi i}{n!} \text{ -ன் மெய்ப்பகுதி}$$

$$= \frac{2\pi}{n!}$$

மாதிரி 5: $a > b > 0$ ஆனல்

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b\cos\theta} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b\sin\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

C என்பது $|z| = 1$ என்ற அலகு வட்டம்.

$z = e^{i\theta}$ ஆனல், $dz = e^{i\theta} \; . \; i \, d\theta$

$$\therefore L \quad \frac{dz}{iz} = d\theta.$$

$$\therefore I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b\cos\theta} = \frac{1}{i}\int_C \frac{dz}{[a + \frac{1}{2}b(z+1/z)]\,z}$$

$$= \frac{2}{i}\int_C \frac{dz}{bz^2+2az+b.}$$

இதில் $f(z) = \dfrac{1}{bz^2+2az+b}$ - ன் துருவங்கள்

$$\alpha = \frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}\;;\; \beta = \frac{-a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}$$

ஆகும். ஆனால் $a>b>0$ என்பது கொள்கை.

$\therefore \quad |\beta| > 1$ என்பது தெளிவு. ஆனால் $\alpha\,\beta = 1$.

$\therefore \quad |\alpha| < 1$ ஆக இருக்க வேண்டும். $\therefore$ α மட்டும் Cயின் உள்ளே இருக்கும்.

$$\therefore \quad (z=\alpha\text{ல் எச்சம்}) = \lim_{z\to\alpha} \frac{(z-\alpha)\;1}{b\,(z-\alpha)\,(z-\beta)}$$

$$= \frac{1}{b\,(\alpha-\beta)} = \frac{1}{b\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{a^2-b^2}}$$

$$\therefore \int_C \frac{dz}{bz^2+2az+b} = 2\pi i \times \frac{1}{2\sqrt{a^2-b^2}} = \frac{\pi i}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

$$\therefore \quad I = \frac{2}{i}\int_C \frac{dz}{bz^2+2az+b} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

மாதிரி 6:

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(a+\cos\theta)^2} = \frac{\pi a}{(a^2-1)^{3/2}} \quad . \quad (a>1).$$

$|z| = 1$ என்ற வட்டத்தை C யாகக் கொள்க.

$z = e^{i\theta}$ ஆனால் $\dfrac{dz}{iz} = d\theta$ ஆகும்.

$$I = \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(a+\cos\theta)^2} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a+\cos\theta)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\int_C \frac{1}{[a+\frac{1}{2}(z+1/z)]^2}\,\frac{dz}{iz}$$

$$= \frac{1}{2i}\int_C \frac{4z\,dz}{(z^2+2az+1)^2} = \frac{2}{i}\int_C f(z)\,dz$$

$f(z)$-ன் துருவங்கள் $\alpha = -a+\sqrt{a^2-1}$; $\beta = -a-\sqrt{a^2-1}$ இதில் $a>1$ ஆகையால் $|\beta|>1$.

மேலும் $\alpha\beta = 1$ $\therefore$ $|\alpha|<1$ $\therefore$ α தான் Cயின் உள்ளே இருக்கும்.

$z=\alpha$ என்ற 2-தர துருவத்தில் உள்ள எச்சம்

$$= \lim_{z\to\alpha} \frac{1}{1!}\,\frac{d}{dz}\left\{\frac{(z-\alpha)^2 \cdot z}{(z-\alpha)^2(z-\beta)^2}\right\}$$

$$= \lim_{z\to\alpha} \frac{(z-\beta)^2 \cdot - z \cdot 2(z-\beta)}{(z-\beta)^4} = \lim_{z\to\alpha} \frac{z-\beta-2z}{(z-\beta)^3}$$

$$= \frac{-(\alpha+\beta)}{(\alpha-\beta)^3} = \frac{2a}{\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}^{3/2}}$$

$$= \frac{2a}{(4a^2-4)^{3/2}} = \frac{2a}{8(a^2-1)^{3/2}} = \frac{a}{4(a^2-1)^{3/2}}$$

$$\therefore \int_C f(z)\,dz = 2\pi i \times \frac{a}{4(a^2-1)^{3/2}} = \frac{\pi a i}{2(a^2-1)^{3/2}}$$

$$\therefore I = \frac{2}{i}\int_C f(z)\,dz = \frac{\pi a}{(a^2-1)^{3/2}}$$

மாதிரி 7: $a^2 < 1$ ஆகவும், n ஒரு மிகை முழு எண்ணாகவும்

இருந்தால் $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin n\theta \, d\theta}{1+2a\cos\theta+a^2} = 0$

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\sin n\theta \cdot d\theta}{1+2a\cos\theta+a^2}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{e^{in\theta}\, d\theta}{1+2a\cos\theta+a^2} \text{ ன் கற்பனைப் பகுதி.}$$

C என்பது $|z| = 1$ என்ற வட்டம்; $z = e^{i\theta}$ என்று போடு.

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{in\theta}\, d\theta}{1+2a\cos\theta+a^2} = \int_C \frac{z^n}{1+a(z+1/z)+a^2} \frac{dz}{iz}$$

$$= \frac{1}{i}\int_C \frac{z^{n-1}\, dz}{(1+az)(1+a/z)}$$

$$= \frac{1}{ai}\int_C \frac{z^n\, dz}{(z+1/a)(z+a)} = \frac{1}{ai}\int_C f(z)\, dz$$

இதில் $f(z)$-ன் துருவங்கள் $-a$, $-1/a$ ஆகும். இதில் $-a$ தான் Cயின் உள்ளே இருக்கும், $\because$ $a^2<1$.

$z=-a$-ல் $f(z)$-ன் எச்சம்

$$= \lim_{z\to -a} \frac{(z+a)\cdot z^n}{(z+a)(z+1/a)} = \frac{(-a)^n}{(-a+1/a)}$$

$$\therefore \int_C f(z)\, dz = 2\pi i \times \frac{(-1)^n a^n}{(1-a^2)/a}$$

$$\therefore I = \frac{1}{ai} \cdot \frac{2\pi i(-1)^n a^{n+1}}{(1-a^2)} \text{ ன் கற்பனைப் பகுதி} = 0.$$

துணை முடிவு.

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos n\theta \, d\theta}{1+2a\cos\theta+a^2} \doteq I \text{-ன் மெய்ப்பகுதி}$$

$$= \frac{2\pi\,(-1)^n a^n}{(1-a^2)}.$$

5·10 $\int_{-\infty}^{\infty} F(x) \begin{Bmatrix} \cos mx \\ \sin mx \end{Bmatrix} dx$ ஐக் காணும் முறை.

ஜார்டன் சமனிலி. $0 < x \leq \theta < \pi/2$ ஆனல் $y = \cos x$ என்ற வளை கோட்டில், சராசரி நிலைத் தூரம் குறைந்து வரும்.

$$\therefore \quad \frac{1}{\theta} \int_0^{\theta} \cos x \, dx = \frac{\sin\theta}{\theta} \quad \text{என்பது குறையும் சார்பு.}$$

$$\therefore 0 \leq \theta \leq \pi/2 \text{ ஆனல்,} \quad \frac{2}{\pi} \leq \frac{\sin\theta}{\theta} \leq 1.$$

இதனை ஜார்டன் சமனிலி என்பர்.

ஜார்டன் துணைக் கோட்பாடு. $k > 0$, $z = Re^{i\theta}$

ஆனல் $|\,F(z)\,| \leq \dfrac{M}{R^k}$ ஆக இருந்தால்

$$\underset{R\to\infty}{\text{எல்லை}} \int_{\Gamma} e^{imz} F(z)\, dz = 0 \text{ ஆகும்.}$$

இதில் Γ என்பது (5·8ல் உள்ள) மெய்யச்சின் மேலுள்ள அரைவட்ட வளைகோடு. மேலும், m என்ற மாறிலி ஒரு மெய் மிகையெண்.

நிருபணம்.

$$\left| \int_{\Gamma} e^{imz} F(z)\, dz \right|$$

$$= \left| \int_0^{\pi} e^{imR\exp(i\theta)} . F(Re^{i\theta}) . Re^{i\theta} i\, d\theta \right|$$

$$\leq \left| \int_0^{\pi} e^{imR(\cos\theta + i\sin\theta)} . F(Re^{i\theta}) . R\, d\theta \right|$$

$$\leq \left| \int_0^{\pi} e^{-mR\sin\theta} . F(Re^{i\theta})\; R\, d\theta \right|$$

$$\leq \int_0^{\pi} e^{-mR\sin\theta} . \frac{M}{R^k} . R\, d\theta.$$

$$\leq \frac{2M}{R^{k-1}} \int_0^{\pi/2} e^{-mR\sin\theta}\, d\theta.$$

$$\leq \frac{2M}{R^{k-1}} \int_0^{\pi/2} e^{-2mR\theta/\pi}\, d\theta \quad \because \sin\theta \geq 2\theta/\pi$$

$$\leq \frac{2M}{mR^k} (1-e^{-mR}) = 0 \quad \because R \to \infty$$

5·11. இப்பொழுது, $F(z)$-க்கு மெய்யச்சில் துருவங்கள் இல்லை எனக் கொள்வோம். எனவே, $F(z)\,e^{imz}$ என்ற சார்புக்கும் மெய்யச்சில் துருவங்கள் இல்லை என்பது தெளிவு.

∴ 5·8-ல் உள்ளபடி,

$$\text{(i)} \quad \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\cos mx\, dx$$

$= \int_C F(z)\, e^{imz}\, dz$ -ன் மெய்ப்பகுதி.

$= 2\pi i\, R^+$ ன் மெய்ப்பகுதி எனலாம்.

இதில் R^+ என்பது மேல்தளத்தில் உள்ள எச்சங்களின் தொகையாகும். இதேவிதமாக,

$$\text{(ii)} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) \sin mx \, dx$$

$$= \int_C F(z)\, e^{imz}\, dz\text{-ன் கற்பனைப்பகுதி.}$$

$$= 2\pi i\, R^+ \text{ ன் கற்பனைப்பகுதி எனலாம்.}$$

இனி, $F(z)$ ஆனது, மெய்யச்சில் முடிவுள்ள எண்ணிக்கையுள்ள துருவங்களை உடையதாயின், 5·8 (iii)-ல் உள்ளபடி

$$\text{(iii)} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) \cos mx \, dx$$

$$= \int_C F(z)\, e^{imz}\, dz\text{-ன் மெய்ப்பகுதி}$$

$$= 2\pi i\, R^+ + \pi i\, R^o\text{-ன் மெய்ப்பகுதி.}$$

இதே விதமாக,

$$\text{(iv)} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) \sin mx \, dx$$

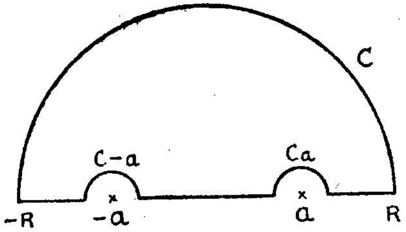
$$= \int_C F(z)\, e^{imz}\, dz\text{ -ன் கற்பனைப்பகுதி}$$

$$= 2\pi i\, R^+ + \pi i\, R^o\text{-ன் கற்பனைப்பகுதி.}$$

இதில் R^o என்பது மெய்யச்சில் உள்ள எச்சங்களின் தொகையாகும்.

இவற்றைப் பல்வேறு எடுத்துக்காட்டுகளால் விளக்குவோம்.

மாதிரி 1 : $a>0$ ஆனால் $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x\, dx}{a^2 - x^2} = \frac{\pi \sin a}{a}$



படம் 15

$\frac{e^{iz}}{a^2 - z^2}$ என்ற சார்பை எடுத்துக் கொள்வோம்.

இதற்கு $z = \pm a$ல் இரு எளிய துருவங்கள் உள்ளன. ஆகவே, அப் புள்ளிகளை நெளிசல்கள் மூலம் தவிர்த்து, படத்தில் காட்டிய படி உள்ள C என்ற வளைவரையை எடுத்துக் கொள்வோம்.

இப்பொழுது, $R^+ = 0$ ஏனெனில், மேல்தளத்தில் துருவமே இல்லை.

$R^o =$ $(z=a)$-ல் உள்ள எச்சம்

$+ (z=-a)$,, ,,

$$= \lim_{z\to a} (z-a) \frac{e^{iz}}{a^2-z^2} + \lim_{z\to -a} (z+a) \frac{e^{iz}}{a^2-z^2}$$

$$= \lim_{z\to a} - \frac{e^{iz}}{(a+z)} + \lim_{z\to -a} \frac{e^{iz}}{(a-z)}$$

$$= -\frac{e^{ia}}{2a} + \frac{e^{-ia}}{2a} = -\frac{i \sin a}{a}$$

(இங்கு "எல்லை" = lim)

$$\int_C \frac{e^{iz}\,dz}{a^2-z^2} = 2\pi i\,R^+ + \pi i\,R^0$$

$$= 0 + \frac{\pi i\{-i\sin a\}}{a} = \frac{\pi\sin a}{a}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x\,dx}{a^2-x^2}$$

$$= \int_C \frac{e^{iz}\,dz}{a^2-z^2} \text{ -ன் மெய்ப்பகுதி}$$

$$= \frac{\pi\sin a}{a}$$

துணை முடிவு. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x\,dx}{a^2-x^2}$

$$= \int_C \frac{e^{iz}\,dz}{a^2-z^2} \text{ ன் கற்பனைப்பகுதி.}$$

$$= 0.$$

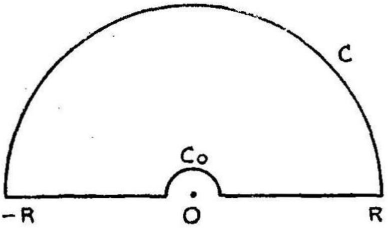
மாதிரி 2 : $a>0$, $b>0$ ஆனால்,

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos 2ax - \cos 2bx}{x^2}\,dx = \pi(b-a)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos 2ax - \cos 2bx}{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2ax - \cos 2bx}{x^2}\,dx.$$

ஆகவே, $\displaystyle\int_C \frac{e^{2iaz} - e^{2ibz}}{z^2}\,dz$ ஐ எடுத்துக் கொள்வோம்.

$z = 0$ இரண்டாந்தர துருவமாதலின், படத்தில் காட்டிய நெளிசல் மூலமாய் அதைத் தவிர்ப்போம்.



படம் 16

இதிலும், $R^+ = 0$ ஏனெனில், மேல் தளத்தில் துருவமே இல்லை.

$R^0 =$ $(z=0)$-ல் உள்ள எச்சம்

$= f(z)$-ல் $\dfrac{1}{z}$-ன் கெழு

$= \dfrac{2i\,(a-b)\,z - 2\,(a^2-b^2)\,z^2 - \ldots}{z^2}$ ல் $\dfrac{1}{z}$-ன் கெழு

$= 2i\,(a-b)$

$$\therefore \int_C \frac{e^{2iaz} - e^{2ibz}}{z^2}\,dz = \pi i \times 2i\,(a-b) = 2\pi\,(b-a).$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2\,ax - \cos 2\,bx}{x^2}\,dx = 2\pi(b-a)\text{-ன் மெய்ப்பகுதி}$$

$$= 2\pi\,(b-a)$$

$$\therefore \int_0^{\infty} \frac{\cos 2ax - \cos 2bx}{x^2}\,dx = \pi(b-a)$$

மாதிரி 3:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x \, dx}{x^2+4x+5} = \frac{-\pi}{e} \sin 2$$

$$\int_C F(z)\, e^{iz}\, dz = \int_C \frac{e^{iz}\, dz}{z^2+4z+5}$$ ஐ எடுத்துக்கொள்.

இதில் C என்பது (5·8ல் உள்ள) மெய்யச்சின் மேலுள்ள ... அடைத்த அரைவட்டக்கோடு. இதில் Γ என்பது (மெய்யச்சு நீங்கலாக) அரை வட்ட வளைகோடு. இதில்,

$$\left| \frac{1}{z^2+4z+5} \right| < \frac{2}{R^2}.$$

∴ ஜார்டன் கோட்பாட்டின்படி, $R \to \infty$ ஆனல்

$$\int_\Gamma \frac{e^{iz}\, dz}{z^2+4z+5} = 0$$

இதன் துருவங்களைக் காண, $z^2+4z+5 = 0$.

∴ $z = -2 \pm i$. இதில் $-2+i$ மட்டும் Cயின் உள்ளே உள்ளது. இதில் $F(z)\ e^{iz}$ ன் எச்சம்

$$= \underset{z \to -2+i}{\text{எல்லை}} \left\{ \frac{(z+2-i)\, e^{iz}}{(z+2-i)\,(z+2+i)} \right\}$$

$$= e^{-1-2i} \div 2i$$

$$\therefore \int_C \frac{e^{iz}\, dz}{z^2+4z+5} = \frac{2\pi i\, e^{-1-2i}}{2i}$$

$$\therefore \int_{-R}^{R} F(x)\, e^{ix}\, dx + \int_\Gamma F(z)\, e^{iz}\, dz = \pi e^{-1-2i}.$$

$R \to \infty$ ஆனல்,

$$\int_{\Gamma} F(z)\, e^{iz} dz = 0 \quad \therefore \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}\, dx}{x^2+4x+5} = \pi\, e^{-1-2}$$

இதன் கற்பனைப் பகுதிகளைச் சமமாக்க

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x\, dx}{x^2+4x+5} = -\frac{\pi}{e} \sin 2.$$

மாதிரி 4: $m>0$ ஆனால் $I = \int_{0}^{\infty} \frac{\cos mx\, dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2} e^{-m}$

$\int_{C} \frac{e^{imz}\, dz}{z^2+1}$ ஐக் கவனி. C என்பது (5·8ல் உள்ள மெய்யச்சின் மேலுள்ள அரை வட்டம்

$$\left| \frac{1}{z^2+1} \right| < \frac{2}{R^2}$$. இங்கு $R \to \infty$; $z = Re^{i\theta}$

$$\therefore \int_{\Gamma} F(z)\, e^{imz}\, dz = 0$$

இதில் துருவங்கள் $z = \pm i$. இதில் $z = i$ மட்டும்தான் Cயின் உள்ளே உள்ளது. எனவே,

$$(z = i\text{-ல் உள்ள எச்சம்}) = \lim_{z \to i} \frac{(z-i)\, e^{imz}}{(z-i)(z+i)} = e^{-m} / 2i$$

$$\therefore \int_{C} F(z)\, e^{imz}\, dz = 2\pi i .\ e^{-m}/2i = \pi e^{-m}$$

$$\therefore \int_{-R}^{R} \frac{\cos mx\, dx}{x^2+1} + i \int_{-R}^{R} \frac{\sin mx\, dx}{x^2+1} + \int_{\Gamma} F(z)\, e^{imz}\, dz$$

$$= \pi e^{-m}$$

$$R\to\infty; \quad \therefore \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mx\, dx}{x^2+1} + 0 + 0 = \pi e^{-m}$$

$$\therefore\ 2\int_0^{\infty} \frac{\cos mx\, dx}{x^2+1} = \pi e^{-m}$$

$$\therefore\ I = \pi e^{-m}/2$$

மாதிரி 5: $a>0$, $m>0$ ஆனால்

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x \sin mx\, dx}{x^2+a^2} = \frac{\pi e^{-ma}}{2}$$

$\int_C \frac{ze^{imz}\, dz}{z^2+a^2}$ ஐக் கவனி. C என்பது (5·8ல் உள்ள) மெய்யச்சின் மேலுள்ள அரை வட்டம். $|z|\to\infty$ ஆக

$\left|\frac{z}{z^2+a^2}\right| < \frac{M}{R}$ என்பது தெளிவு. $z = Re^{i\theta}$ ஆகும்.

எனவே $\int_\Gamma \frac{ze^{imz}\, dz}{z^2+a^2} = 0$

[இதை நேரிடையாக நிரூபிக்க, $\left|\int_\Gamma \frac{e^{imz}\cdot z\, dz}{z^2+a^2}\right|$

$$\le \int_\Gamma \frac{|e^{imz}|\ |z|\ |dz|}{|z^2+a^2|}$$

$$\leq \frac{R^2}{R^2-a^2} \int_0^{\pi} e^{-mR \sin\theta} \, d\theta$$

$$< \frac{2R^2}{R^2-a^2} \int_0^{\pi/2} e^{-mR \sin\theta} \, d\theta$$

$$< \frac{2R^2}{R^2-a^2} \int_0^{\pi/2} e^{-2\, mR\, \theta/\pi} \, d\theta$$

$$< \frac{\pi R}{m\,(R^2-a^2)} \left[e^{-2\, mR\, \theta/\pi} \right]_0^{\pi/2}$$

$$< \frac{\pi R}{m\,(R^2-a^2)} \left(1-e^{-mR} \right) = 0 \,\Big]$$

இதன் துருவங்களான $\pm ai$ என்பவற்றில், ai மட்டும்தான் C என்ற மேல் அரைவட்டப் பகுதியில் இருக்கும். இதில் உள்ள எச்சம்

$$= \underset{z \to ai}{\text{எல்லை}} \; \frac{(z-ai)\, z e^{imz}}{(z-ai)(z+ai)}$$

$$= \frac{ai\; e^{-ma}}{2\,ai} = \frac{e^{-ma}}{2}$$

$$\therefore \int_C F(z)\, e^{-mz} \, dz = 2\pi i . \frac{e^{-ma}}{2} = \pi i\, e^{-ma}$$

$$\therefore \int_{-R}^{R} \frac{x\, e^{imx}\, dx}{x^2+a^2} + \int_{\Gamma} \frac{z^{imz}\, dz}{z^2+a^2} = \pi i e^{-ma}$$

$R \to \infty$ ஆனால் $\int_{\Gamma} \frac{z e^{imz} dz}{z^2 + a^2} = 0$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \, e^{imx} \, dx}{x^2 + a^2} = \pi i \, e^{-ma}.$$

இதன் கற்பனைப் பகுதிகளைச் சமமாக்க

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin mx \, dx}{x^2 + a^2} = \pi e^{-ma}$$

$$\therefore 2 \int_{0}^{\infty} \frac{x \sin mx \, dx}{x^2 + a^2} = \pi e^{-ma}$$

$$\therefore \int_{0}^{\infty} \frac{x \sin mx \, dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi e^{-ma}}{2}.$$

மாதிரி 6: $a > b > 0$ ஆனால்,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x \, dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} = \frac{\pi}{a^2 - b^2} \cdot \left\{ \frac{e^{-b}}{b} - \frac{e^{-a}}{a} \right\}$$

$\int_{C} \frac{e^{iz} \, dz}{(z^2 + a^2)(z^2 + b^2)}$ ஐக் கவனி. C என்பது (5·8 ல் உள்ள) மெய்யச்சின் மேலுள்ள அரைவட்டம்.

$\left| \frac{1}{(z^2 + a^2)(z^2 + b^2)} \right| < \frac{M}{R^4}$ என்பது தெளிவு.

$$\therefore \int_{\Gamma} \frac{e^{iz} \, dz}{(z^2 + a^2)(z + b^2)} = 0,$$

இதன் துருவங்களான $\pm ai$, $\pm bi$ என்பவற்றில் ai, bi என்ற இரண்டு மட்டும் Cயின் உள்ளே உள்ளது.

$$(z=ai \text{ ல் எச்சம்}) = \underset{z\to ai}{\text{எல்லை}} \quad \frac{(z-ai)\, e^{iz}}{(z-ai)\,(z+ai)\,(z^2+b^2)}$$

$$= \frac{e^{-a}}{2ai\;(b^2-a^2)} \quad \text{இதே விதமாக,}$$

$$(z=bi \text{ ல் எச்சம்}) = \frac{e^{-b}}{2bi\;(a^2-b^2)}$$

$$\therefore \int_C \frac{e^{iz}\,dz}{(z^2+a^2)\,(z^2+b^2)} = 2\pi i \text{ (எச்சங்களின் தொகை)}$$

$$= 2\pi i \left\{ \frac{e^{-a}}{2ai\;(b^2-a^2)} + \frac{e^{-b}}{2bi\;(a^2-b^2)} \right\}$$

$$\therefore \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}\,dx}{(x^2+a^2)\,(x^2+b^2)} + \int_{\Gamma} \frac{e^{iz}\,dz}{(z^2+a^2)\,(z^2+b^2)}$$

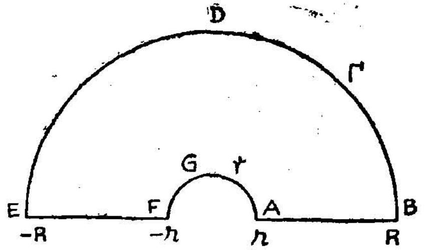
$$= \frac{\pi}{(a^2-b^2)} \left\{ \frac{e^{-b}}{b} - \frac{e^{-a}}{a} \right\}$$

$$R\to\infty \text{ ஆனல் } \int_{\Gamma} \frac{e^{iz}\,dz}{(z^2+a^2)\,(z^2+b^2)} = 0.$$

எனவே, இவற்றின் மெய்ப்பகுதிகளைச் சமமாக்க,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x\,dx}{(x^2+a^2)\,(x^2+b^2)} = \frac{\pi}{(a^2-b^2)} \left\{ \frac{e^{-b}}{b} - \frac{e^{-a}}{a} \right\}$$

மாதிரி 7: $\int_0^\infty \frac{\sin x\, dx}{x} = \frac{\pi}{2}$



படம் 17

இப்போது C என்பது $ABDEFGA$ என்ற அடைத்த வளை கோடு ஆகும். $z=0$ என்ற சிறப்புப் புள்ளியைத் தவிர்க்க r என்ற மிகச்சிறிய ஆரத்தை உடைய $(r \to 0)$ $\gamma = FGA$ என்ற அரை வட்டம் உதவுகிறது. எனவே,

$$\int_C \frac{e^{iz}\, dz}{z} = 0. \text{ கோஷியின் தேற்றம்.}$$

$$\therefore \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix} dx}{x} + \int_{FGA} \frac{e^{iz}\, dz}{z} + \int_r^R \frac{e^{ix}\, dx}{x}$$

$$+ \int_{BDE} \frac{e^{iz}\, dz}{z} = 0. \qquad \dots (1)$$

இதில் $\int_{FGA} \frac{e^{iz}\, dz}{z}$ ஐ எடுத்துக்கொள்.

$\lim_{z \to 0} z \times \frac{e^{iz}}{z} = 1.$ $\therefore$ 5·6 தேற்றத்தின்படி

$$\int_{FGA} \frac{e^{iz}\,dz}{z}\, i = -i \times 1 \times \pi = -i\pi$$ (இது வலஞ்சுழியாதலின் குறையெண்)

இனி, $\left| \frac{1}{z} \right| < \frac{M}{R}$ என்பது தெளிவு. $(M>1)$.

$\therefore$ $R \to \infty$ ஆனால் $\int_{BDE} \frac{e^{iz}\,dz}{z} = \int_{\Gamma} \frac{e^{iz}\,dz}{z} = 0.$

(5·10 ஐப்பார்.)

கடைசியாக, $\int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}\,dx}{x} + \int_{r}^{R} \frac{e^{ix}\,dx}{x}$ ஐக் கவனி.

முதலாவது தொகையீட்டில் $x = -y$ என்று போடு.

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}\,dx}{x} = \int_{R}^{r} \frac{e^{-iy}(-dy)}{(-y)}$$

$$= \int_{R}^{r} \frac{e^{-iy}\,dy}{y} = -\int_{r}^{R} \frac{e^{-iy}\,dy}{y} = -\int_{r}^{R} \frac{e^{-ix}\,dx}{x}$$

$$\therefore \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}\,dx}{x} + \int_{r}^{R} \frac{e^{ix}\,dx}{x}$$

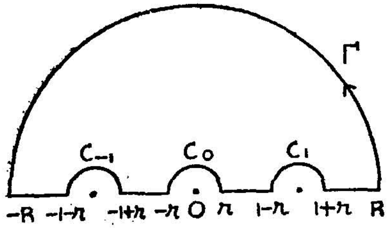
$$= \int_{r}^{R} \frac{e^{ix} - e^{-ix}\,dx}{x} = 2i \int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

$\therefore$ $r \to 0$; மேலும் $R \to \infty$.

$\therefore$ (1)ல் இருந்து, $2i \int_{0}^{\infty} \frac{\sin x\,dx}{x} - i\pi = 0.$

$$\therefore \int_0^{\infty} \frac{\sin x\, dx}{x} = \frac{\pi}{2}$$

மாதிரி 8: $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin \pi x\, dx}{x(1-x^2)} = \pi$



படம் 18

படத்தில் காட்டியபடி C என்ற அடைத்த வளைகோட்டை எடுத்துக்கொள். $z=-1$, $z=0$, $z=1$ என்ற சிறப்புப்புள்ளிகளை வெளிப்புறமாக நீக்கி C நெளிந்து செல்வதைக் கவனி.

$$\therefore \int_C F(z)dz = \int_C \frac{e^{i\pi z}\, dz}{z(1-z^2)} = 0 \quad \ldots (1) \text{ காஷி தேற்றம்.}$$

$$\therefore \int_{-R}^{-1-r} F(x)\, dx + \int_{C_{-1}} F(z)\, dz + \int_{-1+r}^{-r} F(x)\, dx$$

$$+ \int_{C_0} F(z)\, dz + \int_r^{1-r} F(x)\, dx + \int_{C_1} F(z)\, dz$$

$$+ \int_{1+r}^{R} F(x)\, dx + \int_{\Gamma} F(z)\, dz = 0 \quad \ldots (2)$$

முதலாவதாக, $\int_{\Gamma} F(z)\, dz = 0$, 5·10 ஐப்பார்.

ஏனெனில் $R \to \infty$ ஆனால், $\left| \frac{1}{z(1-z^2)} \right| < \frac{M}{R^3} \to 0$

C_{-1} என்ற அரைவட்டம் -1ஐ மையமாகக் கொண்டது.

$$\lim_{z \to -1} \frac{(z+1)\, e^{i\pi z}}{z(1-z)(1+z)} = \frac{e^{-i\pi}}{-2} = \tfrac{1}{2}, \quad \therefore \quad 5·6\text{-ன் படி}$$

$\int_{C_{-1}} F(z)\, dz = -i\pi \times \frac{1}{2}$ (இது வலஞ்சுழியாதலின் குறையெண்.)

C_0 என்ற அரைவட்டத்தில் $\int_{C_0} F(z)\, dz = -i\pi \times 1.$

ஏனெனில், $\lim_{z \to 0} \frac{z\, e^{i\pi z}}{z(1-z^2)} = 1.$

C_1 என்ற அரைவட்டத்தில் $\int_{C_1} f(z)\, dz = -i\pi \times \frac{1}{2}$

ஏனெனில், $\lim_{z \to 1} \frac{(z-1)\, e^{i\pi z}}{-(z-1)(z+1)z} = \frac{e^{i\pi}}{-2} = \frac{1}{2}$

கடைசியாக, $\int_{-R}^{-1-r} F(x)\, dx + \int_{-1+r}^{-r} F(x)\, dx + \int_{r}^{1-r} F(x)\, dx$

$$+ \int_{1+r}^{R} F(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\pi x}\, dx}{x(1-x^2)}$$

ஏனெனில் $r \to 0$, மேலும் $R \to \infty$.

$\therefore$ (2)ல் இருந்து

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\pi x}\, dx}{x(1-x^2)} - 2i\pi = 0.$$

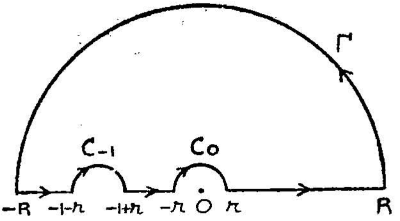
இதன் கற்பனைப் பகுதிகளைச் சமமாக்க,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi x \, dx}{x(1-x^2)} = 2\pi.$$

$$\therefore \int_{0}^{\infty} \frac{\sin \pi x \, dx}{x(1-x^2)} = \pi.$$

மாதிரி 9: $0 < a < 1$ ஆனால்

(i) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1} dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin a\pi}$ (ii) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1} dx}{1-x} = \pi \cot a\pi$



படம் 19

படத்தில் காட்டியபடி C என்ற அடைத்த வளைகோட்டை எடுத்துக்கொள். $z=-1$, $z=0$ என்ற சிறப்புப் புள்ளிகளை வெளிப்புறமாக நீக்கி C நெளிந்து செல்வதைக் கவனி

$$\therefore \int_C F(z)\,dz = \int_C \frac{z^{a-1}\,dz}{1+z} = 0 \ldots \text{(1)}$$ காஷித் தேற்றம்.

$$\therefore \int_{-R}^{-1-r} F(x)\,dx + \int_{C_{-1}} F(z)\,dz + \int_{-1+r}^{-r} F(x)\,dx$$

$$+ \int_{C_0} F(z)\,dz + \int_{r}^{R} F(x)\,dx + \int_{\Gamma} F(z)\,dz = 0 \ldots \text{(2)}$$

முதலாவதாக, $\int_{\Gamma} F(z)\,dz = 0$, 5·10 ஐப்பார்

ஏனெனில் $|z| \to \infty$ ஆனல் $\left| \dfrac{z^{a-1}}{1+z} \right| < \dfrac{M}{R^a} \to 0.$

($\because$ $a > 0$ என்பது கொள்கை)

C_{-1} என்ற அரைவட்டத்தில்,

$$\lim_{z\to -1} \frac{(z+1)\,z^{a-1}}{(1+z)} = (-1)^{a-1} = (e^{i\pi})^{a-1}$$

$$= e^{i\pi a} \,.\, e^{-i\pi} = -\,e^{i\pi a}$$

$$\therefore \int_{C_{-1}} F(z)\,dz = -i\pi\,(-e^{i\pi a}) = i\pi e^{i\pi a}$$

5·6. ஐப்பார். C_{-1} என்பது வலஞ்சுழியாகச் செல்கிறது. எனவே $-i\pi$ ஆல் பெருக்குகிறோம்.

C_o-ல்; $\displaystyle \lim_{z\to 0} \frac{z.z^{a-1}}{1+z} = \lim_{z\to 0} \frac{z^a}{1+z} = 0.$

$$\therefore \int_{C_o} F(z)\,dz = -i\pi \times 0 = 0.$$

$\therefore$ (2)ல் இருந்து ($r\to 0$ ஆதலின்)

$$\int_{-\infty}^{-1} F(x)\,dx + \int_{-1}^{0} F(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} F(x)\,dx + i\pi e^{i\pi a} = 0 \quad \ldots \quad (3)$$

$$\int_{-\infty}^{-1} F(x)\,dx + \int_{-1}^{0} F(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x}$$

இதில் $y = -x$ எனப்போட்டால், $= \int_{\infty}^{0} \frac{(-1)^{a-1}\, y^{a-1}\,(-dy)}{(1-y)}$

$$= \int_0^{\infty} \frac{(e^{i\pi})^{a-1}\, y^{a-1}\, dy}{1-y}$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{e^{ia\pi}\,.\,e^{-i\pi}\,.\,y^{a-1}\, dy}{1-y}$$

$$= -\int_0^{\infty} \frac{e^{ia\pi}\, x^{a-1}\, dx}{1-x}$$ ∴ (3)ல் இருந்து

$$\therefore \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}\, dx}{1+x} - \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}\,.\,e^{ia\pi}\, dx}{1-x}$$

$$= -i\pi e^{i\pi a}$$

இதன் மெய், கற்பனைப் பகுதிகளைச் சமமாக்க,

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}\, dx}{1+x} - \int_0^{\infty} \frac{\cos a\pi\,.\,x^{a-1}\, dx}{1-x} = \pi \sin \pi a \quad (4)$$

$$-\int_0^{\infty} \frac{\sin \pi a\,.\,x^{a-1}\, dx}{1-x} = -\pi \cos \pi a \quad \ldots (5)$$

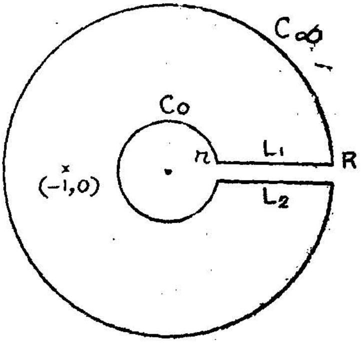
$$\therefore \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}\, dx}{1-x} = \pi \cot \pi a \quad \ldots (ii)$$

இதை (4)-ல் போடு.

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x} - \cos a\pi \frac{\pi \cos \pi a}{\sin \pi a} = \pi \sin \pi a$$

$$\therefore \int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x} = \frac{\pi \sin^2 \pi a + \pi \cos^2 \pi a}{\sin \pi a} = \frac{\pi}{\sin \pi a} \quad \text{(i)}$$

மாதிரி 10 : (வேறுமுறை)



படம் 20

$$0 < a < 1 \text{ ஆனால்,} \quad \int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin a\pi}$$

$f(z) = \dfrac{z^{a-1}}{1+z}$-ஐப் படத்தில் கண்ட வளைவரை வழியே தொகையிடு செய்வோம். இவ் வளைவரையானது.

(1) மெய்யச்சில் r-ல் இருந்து R வரை செல்லும் L_1 என்ற கோட்டில் ஆரம்பிக்கிறது என கொள்வோம். இங்கு வீச்சம் $z=0$ ஆகும்.

(2) இரண்டாவதாக, முடிவிலியை அணுகும் Rஐ ஆரமாக உடைய C_∞ என்ற வட்டத்தின் வழியே சென்று,

(3) பின்பு, R-ல் இருந்து r வரை மெய்யச்சின் வழியே செல்லும் L_2 என்ற கோட்டின் வழி செல்கிறது. இங்கு வீச்சம் $z = 2\pi$ என்பதைக் கவனி.

(4) கடைசியாக r என்ற மிகச் சிறிய (கழிநுண்) ஆரத்தை யுடைய C_0 என்னும் வட்டத்தினால் அடைத்த வளைகோடாகிறது.

$$\therefore \int_{L_1} f(x)\,dx + \int_{C_\infty} f(z)\,dz + \int_{L_2} f(x)\,dx$$

$$+ \int_{C_0} f(z)\,dz = 2\pi i.\ (z = -1\text{ல் உள்ள எச்சம்}) \quad \ldots (1)$$

$$\text{இதில் } \int_{L_1} f(x)\,dx = \int_r^R f(x)\,dx = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx$$

$$\left| \int_{C_\infty} f(z)\,dz \right| \leq \int_{C_\infty} \frac{|z|^{a-1} . |dz|}{|z+1|}$$

$$\leq \frac{2\pi R^a}{(R-1)} \to 0 \quad \because a < 1;\ R \to \infty$$

$$\int_{L_2} f(x)\,dx = \int_R^r f\left(xe^{2\pi i}\right) e^{2\pi i}\,dx$$

$$= -\int_0^\infty \frac{x^{a-1} . e^{2a\pi i}}{1+x}\,dx$$

$$\left| \int_{C_0} f(z)\,dz \right| \leq \int_{C_0} \frac{|z|^{a-1} . |dz|}{|1+z|}$$

$$\leq \frac{2\pi r^a}{1-r} \to 0 \quad \because a > 0;\ r \to 0$$

($z = -1$-ல் உள்ள எச்சம்.)

$$= \underset{z \to e^{\pi i}}{\text{எல்லை}} \frac{(z+1).\ z^{a-1}}{(1+z)} = e^{(a-1)\pi i} = -e^{a\pi i}$$

∴ (1)ல் இருந்து

$$(1-e^{2a\pi i}) \int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x} = -2\pi i\, e^{a\pi i}$$

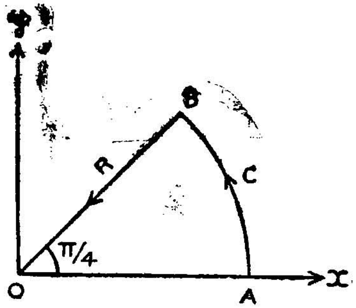
$$\therefore \int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x} = +\frac{2\pi i\, e^{a\pi i}}{(e^{2a\pi i}-1)}$$

$$= \frac{+2\pi i}{(e^{a\pi i} - e^{-a\pi i})}$$

$$= \frac{+2\pi i}{2i \sin a\pi} = \frac{\pi}{\sin a\pi}$$

5·12. பல்வகைக் கணக்குகள்:

மாதிரி 1 : $\int_0^\infty \sin x^2\, dx = \int_0^\infty \cos x^2\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$



படம் 21

படத்தில் உள்ளபடி *OABO* என்ற ஆரைச் சிறையை *C* ஆக எடுத்துக்கொள்,

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C e^{iz^2}\,dz = 0 \quad \dots (1) \text{ காஷி தேற்றம்}$$

$$\therefore \int_{OA} f(x)\,dx + \int_{AB} f(z)\,dz + \int_{BO} f(z)\,dz = 0 \dots (2).$$

$$\int_{OA} f(x)\,dx = \int_0^R e^{ix^2}\,dx = \int_0^R (\cos x^2 + i \sin x^2)\,dx$$

$$\int_{AB} f(z)\,dz = \int_0^{\pi/4} e^{iR^2 e^{2i\theta}} . Re^{i\theta}\, id\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} e^{iR^2 \cos 2\theta - R^2 \sin 2\theta} . \quad Re^{i\theta}\, id\theta$$

$$\leq \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 \sin 2\theta} . R\, d\theta. \text{ (இதில் } R \text{ மாறிலி)}$$

$$\leq \int_0^{\pi/2} e^{-R^2 \sin \phi} . \frac{R}{2}\, d\phi$$

$2\theta = \phi$ ஆனால்,

$$\leq \int_0^{\pi/2} e^{-2R^2 \phi/\pi} . \frac{R}{2}\, d\phi,$$

(ஜார்டன் சமனிலி)

$$\leq \frac{\pi}{4R}\left(1 - e^{-R^2}\right)$$

$= 0$, ஏனெனில் $R \to \infty$.

$$\int_{BO} f(z)\,dz = \int_R^0 e^{ir^2 \exp(i\pi/2)} . e^{i\pi/4}\, dr.$$

(இதில் $z = re^{i\pi/4}$ என்பதைக் கவனி)

$$\int_{BO} f(z)\,dz = \int_R^0 e^{-r^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\,(1+i).\,dr.$$

$$= -\frac{(1+i)}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \because \text{ இதில் } R\to\infty, \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}/2$$

∴ (2)ல் இருந்து

$$\int_0^\infty (\cos x^2 + i \sin x^2)\,dx - \frac{(1+i)}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 0$$

இதன் மெய், கற்பனைப் பகுதிகளைச் சமமாக்க,

$$\int_0^\infty \cos x^2\,dx = \int_0^\infty \sin x^2\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$

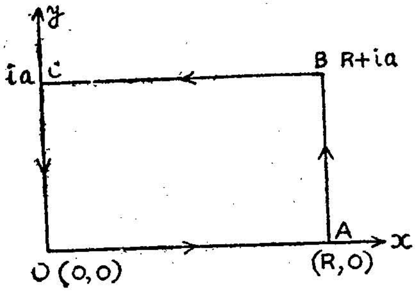
மாதிரி 2: C என்ற செவ்வகத்தின் உச்சிப்புள்ளிகள் 0, R, $R+ia$, ia ஆனல் e^{-z^2} -ன் தொகையீட்டை C வழியே கண்டு

(i) $\int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2ax\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, e^{-a^2}$ என்றும்

(ii) $\int_0^\infty e^{-x^2} \sin 2ax\,dx = e^{-a^2} \int_0^a e^{x^2}\,dx$

என்றும் நிரூபி.

கொடுக்கப்பட்ட சாரியின் சிறப்புப் புள்ளிகள் C யின் உள்ளே இல்லை.



படம் 22

$$\therefore \int_C e^{-z^2} \,.\, dz = 0 \qquad \ldots \text{(1) காஷி தேற்றம்.}$$

$$\therefore \int_0^R e^{-x^2}\, dx + \int_0^a e^{-(R+iy)^2}\, i\,dy$$

$$+ \int_R^0 e^{-(x+ia)^2}\, dx + \int_a^0 e^{-(iy)^2}\, i\,dy = 0.$$

இப்பொழுது $\left| \int_0^a e^{-(R+iy)^2}\, i\,dy \right|$

$$\leq \int_0^\infty e^{-R^2+y^2} dy$$

$$< a\, e^{a^2-R^2}, \because AB\text{-ல் } y \leq a$$

$$= 0, \because R \to \infty$$

$$\therefore \int_R^0 e^{-(x+ia)^2} dx + \int_0^R e^{-x^2}\, dx + i\int_a^0 e^{y^2} dy = 0$$

$$\therefore \int_0^\infty e^{-x^2}\, dx - i \int_0^a e^{y^2}\, dy = \int_0^\infty e^{-x^2+a^2-2iax}\, dx$$

$$\therefore \int_0^\infty e^{-x^2}\, dx - i \int_0^a e^{y^2}\, dy$$

$$= \int_0^\infty e^{-x^2+a^2} \,.\, (\cos 2ax - i \sin 2ax)\, dx$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}/2.$$ என்பதை நினைவிற் கொண்டு,

இதன் மெய், கற்பனைப் பகுதிகளைச் சமமாக்கினால்,

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} = e^{a^2} \int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2\,ax\,dx$$

$$\int_0^a e^{y^2}\,dy = e^{a^2} \int_0^\infty e^{-x^2} \sin 2\,ax\,dx$$

5·13. மெரோமார்பிக் சார்புகள்:

D என்ற அரங்கத்தில், முடிவுள்ள எண்ணிக்கையுள்ள துருவங்களையுடைய $f(z)$ என்ற சார்பு அப்புள்ளிகளைத் தவிர மற்ற இடங்களிலெல்லாம் பகுமுறைச் சார்பாக இருந்தால் அதை மெரோமார்பிக் சார்பு என்று அழைப்போம்.

5·14. மிட்டாக் லப்லர் தேற்றம்:

$f(z)$ என்ற சார்பின் முடிவுள்ள எண்ணிக்கையுள்ள எளிய துருவங்களை அவற்றின் மட்டுகள் அதிகரிக்கும்படி $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ என வரிசைப் படுத்துவோம், இவற்றில் உள்ள எச்சங்கள் முறையே $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$ ஆக இருக்கட்டும். C_N என்பது $|z| = R_N$ என்ற வட்டம். இவ்வட்டத்தின் மேல் (i) ஒரு துருவமும் இருக்கக் கூடாது. (ii) N எதுவாக இருப்பினும் $|f(z)| < M$ ஆக இருக்க வேண்டும். மேலும் N ஆனது ∞ ஐ அணுக, R_N -உம் ∞ ஐ அணுகினால்

$$f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left\{\frac{1}{z-a_n} + \frac{1}{a_n}\right\}$$ ஆகும்.

நிருபணம்: $\dfrac{f(z)}{z-t}$ என்ற சார்பைக் கவனி.

இதன் துருவங்கள் $a_1, a_2, \ldots, a_n$ என்பவற்றோடு t யும் ஆகும்.

a_n-ல் இதன் எச்சம்

$$= \lim_{z \to a_n} (z-a_n) \frac{f(z)}{(z-t)} = \frac{b_n}{(a_n-t)}$$

t-ல் இதன் எச்சம்

$$= \lim_{z \to t} (z-t) \frac{f(z)}{(z-t)} = f(t).$$

∴ எச்சத் தேற்றத்தின்படி

$$\int_{C_N} \frac{f(z)\, dz}{(z-t)} = 2\pi i \left\{ f(t) + \sum_{1}^{n} \frac{b_n}{(a_n-t)} \right\} \quad \dots (1)$$

$f(z)$ ஆனது $z=0$-ல் பகுமுறைச் சார்பெனக் கொள்க.

(1)-ல் $t=0$ என்று போடு.

$$\int_{C_N} \frac{f(z)\, dz}{z} = 2\pi i \left\{ f(0) + \sum_{1}^{n} \frac{b_n}{a_n} \right\} \quad \dots (2)$$

(1)-ல் இருந்து (2)-ஐக் கழிக்க,

$$\int_{C_N} f(z) \left\{ \frac{1}{z-t} - \frac{1}{z} \right\} dz.$$

$$= 2\pi i \left\{ f(t) - f(0) + \sum_{1}^{n} b_n \left(\frac{1}{a_n-t} - \frac{1}{a_n} \right) \right\} \quad \dots (3)$$

இப்போது, $|z| = R_N$ என்ற வட்டத்தில் $|f(z)| < M$.

மேலும் $|z-t| \geq |z| - |t| = R_N - |t|$

$$\therefore \left| \int_{C_N} \frac{f(z)\, dz}{z(z-t)} \right| \leq \frac{M}{R_N} \cdot \frac{2\pi R_N}{(R_N - |t|)}$$

$$= 0$$

ஏனெனில், $N \to \infty$ ஆனால், $R_N \to \infty$.

∴ (3) ஆனது

$$f(t) = f(0) - \Sigma\, b_n \left\{ \frac{1}{a_n - t} - \frac{1}{a_n} \right\}$$

$$f(t) = f(0) + \Sigma\, b_n \left\{ \frac{1}{t - a_n} + \frac{1}{a_n} \right\}$$

$$\therefore\; f(z) = f(0) + \Sigma\, b_n \left\{ \frac{1}{z - a_n} + \frac{1}{a_n} \right\}$$

5·15. $\cot z = \frac{1}{z} + \Sigma \left\{ \frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{n\pi} \right\}$ என நிருபி.

$f(z) = \cot z - \frac{1}{z}$ எனக் கொள்க.

$$\therefore\; f(z) = \frac{z \cos z - \sin z}{z \sin z.}$$

இதன் எளிய துருவங்கள் $z = n\pi$ ஆகும், $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$n\pi\text{-ல் எச்சம்} = \lim_{z \to n\pi} (z - n\pi) \frac{(z \cos z - \sin z)}{z \sin z}$$

$$= \lim_{z \to n\pi} \left(\frac{z - n\pi}{\sin z} \right) \cdot \lim_{z \to n\pi} \frac{z \cos z - \sin z}{z}$$

$$= \lim_{z \to n\pi} \left(\frac{1}{\cos z} \right) \cdot \frac{n\pi \cos n\pi}{n\pi}$$

$= \frac{1}{\cos n\pi} \cdot \cos n\pi = 1.$ ∴ 5·14 தேற்றத்தின்படி

$$\cot z - \frac{1}{z} = \Sigma \left\{ \frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{n\pi} \right\}$$

குறிப்பு 1: $z = 0$ என்பது நீக்கக்கூடிய சிறப்புப்புள்ளி, அது துருவமல்ல. ஏனெனில்

$$\lim_{z\to 0} \frac{z\cos z - \sin z}{z \sin z}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{-z\sin z + \cos z - \cos z}{z\cos z + \sin z}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{-\sin z - z\cos z}{\cos z + \cos z - z\sin z} = \frac{0}{2} = 0$$

குறிப்பு 2: இதிலிருந்து,

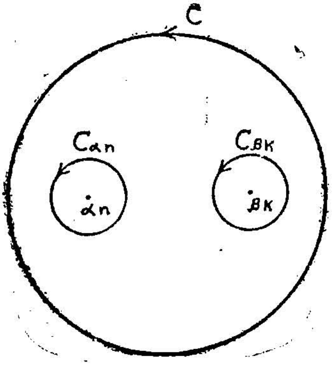
$$\cot z = \frac{1}{z} + 2z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - n^2\pi^2}$$ என நிரூபிக்கலாம்.

5·16. இத்தேற்றத்திற்குமுன் 4·17 (i), (ii), (iii), (iv) ஆகியவற்றை மீண்டும் வாசித்தல் நலம்.

வீச்சத்தேற்றம்: $f(z)$ ஆனது C என்ற எளிய அடைத்த வளைகோட்டின் மேலும், உள்ளும் பகுமுறைச் சார்பாக இருக்கட்டும். இதற்கு விதிவிலக்காக $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ என்ற புள்ளிகளில் $p_1, p_2, \ldots p_n$-தரதுருவங்களும்; $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ என்ற புள்ளிகளில் $n_1, n_2, \ldots, n_k$-தர பூச்சியங்களும் இருக்கட்டும். மேலும், C மேல் $f(z) \neq 0$ ஆனால்

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)\,dz}{f(z)} = N - P \qquad \ldots (1)$$

இதில் $N = \Sigma n_k$; $P = \Sigma p_n$



படம்—23

நிரூபணம்:

$$C_{\alpha_1}, \ldots C_{\alpha_n}, C_{\beta_1}, \ldots C_{\beta_k}$$

என்ற வட்டங்களை C-க்குள் உள்ளவையாகவும், ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொள்ளாதவாறும், $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_k$ என்ற மையங்களை உடையவைகளாகவும் எடுத்துக்கொள். பூச்சியங்களும், துருவங்களும் தனித்தவை (4·28, 4·35) ஆதலின் இது சாத்தியமாகும். 4·7 காஷியின் கிளைத்தேற்றத்தின்படி

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{G}\frac{f'(z)\,dz}{f(z)}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\left[\Sigma\int_{C_{a_n}}\frac{f'(z)\,dz}{f(z)}+\Sigma\int_{C_{\beta_k}}\frac{f'(z)\,dz}{f(z)}\right]\ldots(2)$$

$z=a_n$ என்பது p_n-தரதுருவமாதலின்,

$$f(z)=\frac{g(z)}{(z-a_n)^{p_n}}$$ எனக் கொள்ளலாம்.

இதில் $g(z)$ ஆனது C_{a_n} என்ற வட்டத்தின் மேலும், உள்ளும் பூச்சியத்திலிருந்து மாறுபட்ட பகுமுறைச் சார்பாகும்.

$$\therefore\ \log f(z)=\log g(z)-p_n\log(z-a_n)$$

$$\therefore\ \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{a_n}}\frac{f'z)\,dz}{f(z)}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{a_n}}\frac{g'(z)\,dz}{g(z)}-\frac{p_n}{2\pi i}\int_{C_{a_n}}\frac{dz}{(z-a_n)}$$

$$=0-\frac{p_n}{2\pi i}\cdot 2\pi i=-p_n \quad\ldots(3)$$

$z=\beta_K$ என்பது n_K-தர பூச்சியமாதலின்,

$f(z)=(z-\beta_K)^{n_K}\cdot h(z)$ எனக் கொள்ளலாம். இதில், $h(z)$ ஆனது C_{β_K} என்ற வட்டத்தின் மேலும், உள்ளும் பூச்சியத்திலிருந்து மாறுபட்ட பகுமுறைச் சார்பாகும்.

$$\therefore\ \log f(z)=n_K\log(z-\beta_K)+\log h(z)$$

$$\therefore \quad \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n_K}{(z-\beta_K)} + \frac{h'(z)}{h(z)}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\beta_K}} \frac{f'(z)dz}{f(z)}$$

$$= \frac{n_K}{2\pi i} \int_{C_{\beta_K}} \frac{dz}{(z-\beta_K)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\beta_K}} \frac{h'(z)\,dz}{h(z)}$$

$$= \frac{n_K}{2\pi i} \cdot 2\pi i + 0 = n_K \qquad \ldots\ldots (4)$$

$\therefore$ (2), (3), (4) ல்-இருந்து

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)\,dz}{f(z)} = \Sigma\, n_K - \Sigma p_n = N-P.$$

5·17. வீச்சத்தின் தத்துவம்: $f(z)$ ஆனது Cயின் மேலும், உள்ளும் பகுமுறைச் சார்பானல்

$$N = \frac{1}{2\pi} \cdot \Delta_C \text{ வீச்சம் } f(z).$$

Δ_C வீச்சம் $f(z)$ என்பது z-ஆனது C வழியே செல்லும்போது, $f(z)$-ன் வீச்சத்தில் ஏற்படும் மாற்றத்தைக் குறிக்கும்.

நிரூபணம்:

$f(z)$ பகுமுறைச் சார்பாதலின் P = துருவங்களின் எண்ணிக்கை $=0$. $\therefore$ 5·16 (1) படி

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)\,dz}{f(z)} = N \qquad \ldots (1)$$

இப்போது $w = \log f(z)$ எனக் கொள்க. z-ஆனது C என்ற அடைத்த கோட்டின் வழி செல்ல, w ஆனது Γ என்ற அடைத்த கோட்டின் வழி செல்ல வேண்டும் என்பது தெளிவு.

$$\therefore \quad \int_C \frac{f'(z)\cdot dz}{f(z)} = \int_\Gamma dw$$

மேலும், $\log f(z) = \log |f(z)| + i$ வீச்சம் $f(z)$. ஆனால், $\log |f(z)|$ ஒரே மதிப்புடைய சார்பாகும். எனவே

$$\int_\Gamma dw = i\,\Delta C \text{ வீச்சம் } f(z).$$

$$\therefore N = \frac{1}{2\pi}\,\Delta C \text{ வீச்சம் } f(z).$$

5·18. ரூசேயின் தேற்றம். *$f(z)$, $g(z)$ என்ற சார்புகள் C என்ற எளிய அடைத்த வளைகோட்டின் மேலும், உள்ளும் பகுமுறைச் சார்புகளாக இருந்து, Cயின் மேல் $|g(z)| < |f(z)|$ ஆனால், Cயின் உள்ளே $f(z)$யும், $\{f(z)+g(z)\}$யும் ஒரே எண்ணிக்கையுள்ள பூச்சியங்களை உடையவனவாக இருக்கும்.*

நிரூபணம்.

Cயின் மேல் $|f(z)| > 0$ ஆக இருக்க வேண்டும். மேலும், $|f(z)+g(z)| > |f(z)| - |g(z)| > 0$. $\therefore$ Cயின் மேல் $f(z)$ ஆவது, $\{f(z)+g(z)\}$ ஆவது பூச்சியமாக இருக்கமுடியாது.

இப்பொழுது, $w = 1 + \dfrac{g}{f}$ என்று போடு.

அப்படியானல் $f+g = wf$. எனவே, z ஆனது, Cயின் மேல் இருந்தால் w ஆனது $|w-1| = 1$ என்ற வட்டத்தின் உள்ளே இருக்கும், $\because$ $|g| < |f|$. ஆகையால், z ஆனது Cஐச் சுற்றும்போது, w ஆனது ஆதியைச் சுற்றிச் செல்லாது. எனவே, w-ன் மட்டும் வீச்சமும் z ஒரு சுற்று சுற்றிய பின் மீண்டும் முதலில் பெற்ற மதிப்புகளையே அடைகின்றன. ஆகையால், Cயின் உட்புறம் $f(z)$-க்கு n பூச்சியங்கள் இருந்தால், z ஆனது Cஐச் சுற்ற $f(z) + g(z)$-ன் வீச்சம் $2n\pi$ அளவு அதிகரிக்க வேண்டும். ஆகவே $f(z) + g(z)$யும் Cயினுள் n பூச்சியங்களை உடையதாகும்.

5·19. இயற்கணித அடிப்படைத் தேற்றம்.

n-படி உள்ள ஒவ்வொரு பல்லுறுப்புக் கோவையும், சரியாக n-பூச்சியங்கள் உள்ளவை.

நிரூபணம்.

$a_0+a_1 z+a_2 z^2+\ldots+a_n z^n$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையை எடுத்துக் கொள். இதன் படி n ஆகையால் $a_n \neq 0$. இப்போது, $f(z)=a_n z^n$ என்றும், $g(z)=a_0+a_1 z+\ldots+a_{n-1} z^{n-1}$ என்றும் எடுத்துக் கொள்வோம். C என்பது $|z|=r\ (>1)$ என்ற வட்டம். இதில்

$$\left|\frac{g(z)}{f(z)}\right| \leq \frac{|a_0|+|a_1|r+\ldots+|a_{n-1}|r^{n-1}}{|a_n|r^n}$$

r-ஐ வேண்டிய அளவு பெரிதாக எடுத்துக் கொண்டால்

$|g(z)|<|f(z)|$ என்பது தெளிவு, ($\because$ $r\to\infty$ ஆனால் இது பூச்சியத்தை அணுகும்)!

$\therefore$ 5·17 ரூசே தேற்றத்தின்படி $f(z)+g(z)$யும் $f(z)$யும் ஒரே எண்ணிக்கையுள்ள பூச்சியங்களுடையவை. ஆனால் $f(z)=a_n z^n$ என்பது n பூச்சியங்களை ஆதியில் உடையது. $\therefore$ $f(z)+g(z)=a_0+a_1 z+\ldots+a_n z^n$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையும் n பூச்சியங்கள் உடையதாகும்.

மாதிரி 1: $a>e$ ஆனால் $e^z=az^n$ என்ற சமன்பாட்டின் n மூலங்கள் அலகு வட்டத்தினுள் உள்ளன என நிரூபி.

$f(z)=a z^n$; $g(z)=-e^z$ எனக் கொள்க. C என்பது $|z|=1$ என்ற அலகு வட்டமாய் இருக்கட்டும். Cயின் மேல்,
$|f(z)|=|a z^n|=a$

$$|g(z)| = |-e^z| = |e^z|$$

$$= \left|1+z+\frac{z^2}{2!}+\ldots\right|$$

$$\leq 1+|z|+\frac{|z|^2}{2!}+\ldots$$

$$\leq 1+1+\frac{1^2}{2!}+\ldots$$

$$\leq e.$$

$$\therefore \quad \frac{|g(z)|}{|f(z)|} \leq \frac{e}{a} < 1$$ என்பது கொள்கை.

எனவே ரூசே தேற்றத்தைப் பயன் படுத்தலாம்.

$f(z)$-ன் n பூச்சியங்களும் ஆதியில் உள்ளன என்பது தெளிவு $\therefore$ $f(z)+g(z) = az^n - e^z$ என்பதற்கும் அலகு வட்டத்தினுள் n பூச்சியங்கள் இருக்க வேண்டும்.

மாதிரி 2: $z^7 - 5z^3 + 12 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் எல்லா மூலங்களும் $|z| = 1$, $|z| = 2$ என்ற வட்டங்களுக்கு இடையே இருக்க வேண்டும் என நிரூபி.

முதலாவதாக, $|z| < 1$-ல் ஒரு மூலமும் இல்லை என நிரூபிப்போம்.

$f(z) = 12$; $g(z) = z^7 - 5z^3$ எனக் கொள்க. $|z| = 1$ என்ற வட்டத்தில் $|f(z)| = 12$.

$$|g(z)| = |z^7 - 5z^3| \leq |z^7| + 5|z|^3 \leq 1+5 \leq 6.$$

$$\therefore \quad |g(z)| < |f(z)|.$$

$\therefore$ ரூசே தேற்றத்தின்படி $f(z) + g(z)$-ன் பூச்சியங்களின் எண்ணிக்கை $= f(z)$-ன் பூச்சியங்களின் எண்ணிக்கை.

$f(z) = 12$ ஆனதால் அதற்குப் பூச்சியமே கிடையாது.

$\therefore$ $f(z) + g(z)$க்கும் பூச்சியம் கிடையாது. அதாவது,

$f(z) + g(z) = 0$க்கு மூலம் கிடையாது. அதாவது,

$z^7 - 5z^3 + 12 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள்

$|z| > 1$ என்ற பகுதியில்தான் இருக்க வேண்டும் ... (1)

இப்போது $|z| = 2$ என்ற வட்டத்தை எடுத்துக்கொள். $f(z) = z^7$; $g(z) = -5z^3 + 12$ எனக் கொள்க.

$$\frac{|g(z)|}{|f(z)|} \leq \frac{5|z|^3 + 12}{|z|^7} = \frac{5 \times 2^3 + 12}{2^7} = \frac{52}{128} < 1$$

$\therefore$ ரூசே தேற்றத்தின்படி $f(z) + g(z)$-ன் பூச்சியங்களின் எண்ணிக்கை $= f(z)$-ன் பூச்சியங்களின் எண்ணிக்கை.

ஆனால் $f(z) = z^7$ என்பதன் 7 பூச்சியங்களும் ஆதியில் உள்ளன. $\therefore$ $z^7 - 5z^3 + 12$-ன் 7 பூச்சியங்களும் $|z| = 2$ என்ற வட்டத்தினுள் இருக்க வேண்டும். ... (2)

(1), (2)ல் இருந்து இப்பூச்சியங்கள் $|z|=1$, $|z|=2$ என்ற வட்டங்களுக்கிடையே இருக்க வேண்டும் என்பது தெளிவு.

மாதிரி 3: $z^4+2z^3+3z^2+4z+5 = 0$ என்பதன் மூலங்கள் ஒவ்வொரு காற்பகுதியிலும் (quadrant) அமைந்துள்ளன என நிருபி.

$$f(x)=x^4+2x^3+3x^2+4x+5$$

என்பதற்கு மெய் மிகை மூலம் கிடையாதென்பது தெளிவு.

$$f(-x) = x^4-2x^3+3x^2-4x+5$$

$$= x^2(x^2-2x+1) + 2x^2-4x+5$$

$$= x^2(x-1)^2 + 2\left\{(x-1)^2+\frac{3}{2}\right\}$$

இதுவும் பூச்சியமாக முடியாது. ∴ மெய்யான குறை (—*ve*) மூலமும் கிடையாது.

இனி, (மெய்ப்பகுதியில்லாத) கற்பனையெண் மூலமாக இருக்க முடியுமா என ஆராய $z=iy$ எனபோடு.

$$f(iy) = y^4-2iy^3-3y^2+4iy+5$$

$$= y^4-3y^2+5+2i(2y-y^3)$$

இது பூச்சியமாவதற்கு,

$$y^4-3y^2+5 = 0 \quad \dots \text{(i)} \qquad 2y-y^3 = 0 \quad \dots \text{(ii)}$$

என்ற இரு சமன்பாடுகளும் ஒருங்கே உண்மையாக வேண்டும். இது முடியாதென்பது தெளிவு.

இனி, முதல் காற்பகுதியில் உள்ள மூலத்தைக் காண்போம். இதற்கு R ஆனது ∞ ஐ அணுக முதல் காற்பகுதியிலுள்ள $|z| = R$ என்ற வட்டத்தின் பகுதியை எடுத்துக்கொள். இக் கால் வட்டத்தை,

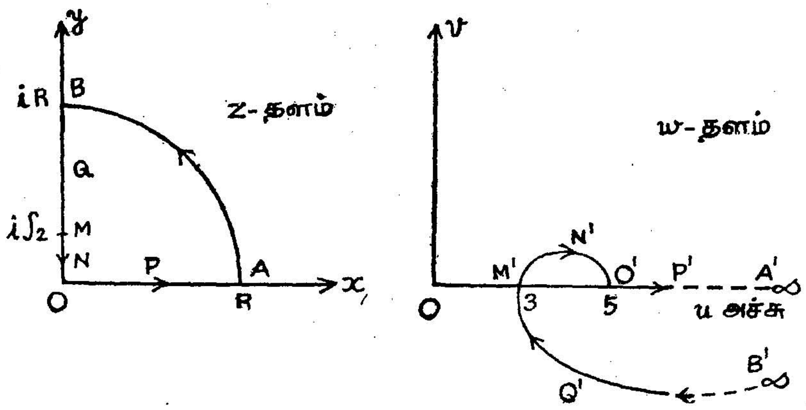
(i) $(0, R)$ என்ற மெய்யச்சின் பகுதி

(ii) $z=Re^{i\theta}$ என்ற வட்ட வில்லில் $0\leq\theta\leq\pi/2$

(iii) $(iR, 0)$ என்ற கற்பனை அச்சின் பகுதி.

ஆகியவற்றால் ஆனதாகக் கருதுகிறோம்.

(i) z ஆனது மெய்யச்சின் வழியே O வில் இருந்து $R\,(=\infty)$ வரை செல்லும்போது $f(z)$ மெய்யான மிகை மதிப்புகளை உடையது என்பது தெளிவு. $\therefore$ $f(z)$-ன் வீச்சத்தில் ஒரு மாறுதலும் ஏற்படாது.



படம் 24

(ii) $z = Re^{i\theta}$ என்ற வட்ட வில்லில் z இருந்தால்

$$f(z) = z^4\left\{1 + \frac{2}{z} + \frac{3}{z^2} + \frac{4}{z^3} + \frac{5}{z^4}\right\}$$

$$= R^4\, e^{4i\theta}\ \{1 + g(z)\}$$

இதில் $z \to \infty$ ஆனால், $g(z) \to 0$. $\therefore$ z ஆனது கால் வட்ட வழி செல்ல, $f(z)$-ன் வீச்சத்தில் உள்ள மாற்றம் $= 4.\ \dfrac{\pi}{2} = 2\pi$.

(iii) z, கற்பனை அச்சு வழியே செல்ல $f(z)$-ன் வீச்சத்தில் என்ன மாற்றம் உண்டாகும்?

$z = iy$ எனப் பிரதியிட, $f(z) = w = u + iv$ என்பதில் $u = y^4 - 3y^2 + 5$; $v = 2y\,(2 - y^2)$. y ஆனது ∞யில் இருந்து 0 ஆக மாற (u, v)ன் வளை கோட்டைப் படத்தில் பார்.

$$\underset{y\to\infty}{\text{எல்லை}}\ \frac{v}{u} = \underset{y\to\infty}{\text{எல்லை}}\ \frac{2y\,(2-y^2)}{y^4 - 3y^2 + 5} = 0$$

∴ (u,v)-ன் u வரைபடம் u அச்சிக்கிணையாக உளது. மேலும்,

y எதுவாயினும், $u = \left(y^2 - \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{11}{4} > 0.$ ஆனல்,

v ஆனது $y > \sqrt{2}$ ஆனல் குறையெண்ணாகவும். $y = \sqrt{2}$ ஆனல் பூச்சியமாகவும், $y < \sqrt{2}$ ஆனல் மிகையெண்ணாகவும் இருக்கும். ஆகவே, y ஆனது ∞யில் இருந்து $\sqrt{2}$ வர, w ஆனது (u அச்சுக் கிணையாக) ∞யில் இருந்து $(3,0)$க்கு வருகிறது. ஆகவே அதன் வீச்சத்தில் மாற்றமில்லை. பின்னரும், y ஆனது $\sqrt{2}$ல் இருந்து பூச்சியத்தை அடைய w ஆனது $(3,0)$ல் இருந்து $(5,0)$க்கு வளை கோடு மூலம் செல்கிறது. (படத்தைப் பார்). மீண்டும் வீச்சத்தில் மாற்றமில்லை.

∴ முதல் காற்பகுதியில் உள்ள மூலங்களின் எண்ணிக்கை $= \frac{1}{2\pi} (0 + 2\pi + 0) = 1.$

இதன் கெழுக்கள் மெய்யெண்களாகையால், கற்பனை மூலங்கள் இணையாக இருக்கும். ஆகவே நான்காம் காற் பகுதியிலும் ஒரு மூலம் உண்டு.

இதே விதமாக இரண்டாம், மூன்றும் காற் பகுதிகளிலும் ஒவ்வொரு மூலம் உண்டு என்று நிரூபிப்பதை உங்கள் பயிற்சிக்கென விடப்பட்டுள்ளது.

பயிற்சி 5. (முதற்பகுதி)

1. பின் வரும் சார்புகளில் உள்ள துருவங்களில் அவற்றின் எச்சத்தைக் கண்டுபிடி :

	சார்பு	விடை.
(i)	$\dfrac{z+1}{z^2-2z}$	$-1/2,\ 3/2$
(ii)	$\dfrac{z^2-2z}{(z+1)^2\,(z^2+4)}$	$-\dfrac{14}{25},\ \dfrac{7\pm i}{25}$
(iii)	$z=1$-ல் $\dfrac{z^3}{(z-1)^4\,(z-2)\,(z-3)}$	$\dfrac{101}{16}$
(iv)	$(1-e^{2z})/z^4$	$-4/3.$
(v)	$z=\infty$யில் $z^3/(z^2-1)$	$-1.$
(vi)	$\tanh z$	1

(vii) $e^z / \sin^2 z$ $e^{m\pi}$

(viii) $(\cot z \coth z)/z^3$ $-7/45.$

(ix) $\cot z$ 1

(x) $z=0$-ல் $e^{1/z}$ 0

2. (i) $\dfrac{e^{iz}}{z^2+a^2}$ (ii) $\dfrac{z\, e^{iz}}{z^2+a^2}$ (iii) $\dfrac{z^4}{z^2+a^2}$

என்ற சார்புகளுக்கு ai-ல் எச்சத்தைக் கண்டுபிடி.

விடை. $e^{-a}/2ai$; $e^{-a}/2$; $-ia^3/2$.

3. $P(z) / Q(z)$ என்ற விகிதமுறு சார்பில் $z=a$ என்பது $P(z)$-ன் எளிய (முதல் தர) பூச்சியமாகவும், $Q(z)$-ன் 2-தர பூச்சியமாகவும் இருந்தால், a-ல் அச்சார்பின் எச்சம் $2P'(a) / Q''(a)$ என நிருபி.

4. ஒரு விகிதமுறு சார்பின் எச்சங்களின் கூடுதல் பூச்சியமாகும் என நிருபி.

5. $g(z)$ என்னும் சார்பு $z=a$-ல் பகுமுறைச் சார்பாக உள்ளது. $g(a) \neq 0$ ஆனுல் a என்பது

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)}$$

என்ற சார்பின் எளிய துருவம் என நிருபி. a-ல் $f(z)$-ன் எச்சம் $= g(a)$ என்றும் நிருபி. $g(a) = 0$ ஆனுல் a என்பது $f(z)$-ன் நீக்கக் கூடிய சிறப்புப் புள்ளி என நிருபி.

6. $f(z) = \sum_{r=1}^{n} \dfrac{A_r}{(z-a)^r}$ ஆனுல், $\dfrac{f(z)}{z-t}$

என்ற சார்பின் எச்சம் a என்ற புள்ளியில் $-f(t)$ ஆக இருக்கும் என நிருபி.

7. $z=0$ என்ற புள்ளியில் பின்வரும் சார்புகளின் எச்சங்களைக் கண்டுபிடி:— (i) $1/\sin^2 z$ (ii) $1/z^3 \sin(z^2)$ (iii) $z \cos(1/z)$

விடை $0, 1/6, -1/2.$

8. $e^{1/z}$ என்ற சார்பு $z=0$-ல் தனித்த சாரமுள்ள சிறப்புப் புள்ளி உடையதென நிருபி. $z=0$-ல் $z^{n-1}\, e^{1/z}$ என்ற சார்பின் எச்சம் $\frac{1}{n!}$ என நிருபி.

9. $f(z)$ என்பது ஒரு மதிப்புடைய சார்பு. இதன் சிறப்புப் புள்ளிகள் $z=-1$-ல் முதல் தர (எளிய) துருவமும், $z=2$-ல் 2-தர துருவமுமாகும். இவற்றில் $f(z)$-ன் எச்சம் முறையே 1, 2. மேலும் $f(0) = 7/4$; $f(1) = 5/2$ ஆனால் அச்சார்பை $1<|z|<2$-ல் லாரன்ஸ் தொடராக விரித்தெழுதுக.

கொள்கைப்படி $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z+1)(z-2)^2}$

இதில் $g(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3$ (ஏனெனில், வேறு சிறப்புப் புள்ளிகள் கிடையாது)

$$f(0) = 7/4 \qquad \therefore\ a_0 = 7.$$

$$f(1) = 5/2 \qquad \therefore\ a_1+a_2+a_3 = -2.$$

$$(z=-1)\text{-ல் எச்சம்} = \underset{z\to -1}{\text{எல்லை}} \frac{(z+1)\,.\,g(z)}{(z+1)(z-2)^2}$$

$$\therefore\ 1 = \frac{g(-1)}{9}\ ;\ \therefore\ 9 = 7 - a_1 + a_2 - a_3$$

$$(z=2)\text{-ல் எச்சம்} = \underset{z\to 2}{\text{எல்லை}} \frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\frac{(z-2)^2\, g(z)}{(z+1)(z-2)^2}$$

$$\therefore\ 2 = \underset{z\to 2}{\text{எல்லை}} \frac{(z+1)[a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2] - g(z).}{(z+1)^2}$$

$$\therefore\ 18 = 3(a_1+4a_2+12a_3) - (7+2a_1+4a_2+8a_3)$$

$$25 = a_1 + 8a_2 + 28a_3.$$

$$\therefore\ a_1 = -3,\ a_2 = 0,\ a_3 = 1.$$

$$\therefore\ f(z) = \frac{z^3-3z+7}{(z+1)(z-2)^2}$$

$$= 1 + \frac{1}{1+z} + \frac{2}{z-2} + \frac{3}{(z-2)^2}$$

$$= 1 + \frac{1}{z}\left(1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \cdots\right)$$

$$- \left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \cdots\right)$$

$$+ \frac{3}{4}\left\{1 + 2\left(\frac{z}{2}\right) + 3.\left(\frac{z}{2}\right)^2 + \cdots\right\}$$

10. $f(z)$ ஆனது $z=0$ என்ற 2-தர துருவத்தில் எச்சம் 2 ஐயும், $z=1$ என்ற எளிய துருவத்தில் எச்சம் 2ஐயும் கொண்டுள்ளது. மேலும், ஏனைய எல்லாப் புள்ளிகளிலும் பகுமுறைச் சார்பாகவும், $|z|$ ஆனது ∞ஐ அணுகும்போது $f(z)$ வரம்புள்ளதாகவும் உள்ளது. $f(2)=5$; $f(-1)=2$ ஆனால் $f(z)$-ஐக் கண்டுபிடி.

விடை: $f(z) = 1+2(z-1)^{-1} + 2z^{-1} + 4z^{-2}$

11. $\dfrac{1}{z(e^z-1)}$ என்ற சார்பின் சிறப்புப் புள்ளிகள் எத்தகையவை? $0 < |z| < 2\pi$ ஆனால் இச்சார்பை

$$\frac{1}{z^2} - \frac{1}{2z} + a_0 + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \cdots$$

என விரித்தெழுலாம் என நிரூபி. a_0, a_2 என்பவைகளின் மதிப்பை கண்டுபிடி.

விடை $a_0 = 1/12$; $a_2 = -1/720$

12. $f(z)$-ன் சிறப்புப்புள்ளிகள் $z=1$-ல் 2-தர துருவமும், $z=2$-ல் எளிய துருவமும் அன்றி வேறல்ல. இவற்றிலுள்ள எச்சங்கள் முறையே 1, 3. மேலும், $f(0)=3/2$; $f(-1)=1$ ஆனால் $f(z)$-ஐக் கண்டுபிடி.

விடை: $2+3(z-2)^{-1} + (z-1)^{-1} + 2(z-1)^{-2}$.

13. எச்சத்தேற்றம் துணைகொண்டு நிரூபிக்க:

$$(1) \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$$

(2) $$\int_0^\infty \frac{dx}{x^6+1} = \frac{\pi}{3}$$

(3) $$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{3\pi}{8}$$

(4) $$\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{\pi}{6}$$

(5) $$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)^2} = \frac{5\pi}{288}$$

(6) $$\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^3} = \frac{\pi}{16}$$

(7) $$\int_0^\infty \frac{x^4\,dx}{(1+x^2)^4} = \frac{\pi}{32}$$

(8) $$\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)} = \frac{7\pi}{50}$$

(9) $$\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9} = \frac{5\pi}{12}$$

(10) $$\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{4}$$

(11) $$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b\sin\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

(12) $$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta\, d\theta}{5+4\cos\theta} = \frac{\pi}{6}$$

(13) $$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta\, d\theta}{5-4\cos\theta} = \frac{\pi}{12}$$

(14) $$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos\theta\, d\theta}{5+4\cos\theta} = \frac{-\pi}{3}$$

(15) $$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(5-3\sin\theta)^2} = \frac{5\pi}{32}$$

(16) $$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{1+\sin^2\theta} = \pi\sqrt{2}$$

(17) $a>0$ ஆனல் $$\int_0^{\pi} \frac{a\,dt}{a^2+\cos^2 t} = \frac{\pi}{\sqrt{1+a^2}}$$

(18) $a>b>0$ ஆனல் $$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a+b\cos\theta)^2} = \frac{2\pi a}{(a^2-b^2)^{3/2}}$$

(19) $0 \le r < 1$ ஆனல் $$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2r\cos\theta+r^2} = \frac{2\pi}{1-r^2}$$

(20) $a^2 > b^2 + c^2$ ஆனால் $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{a + b \cos\theta + c \sin\theta}$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}}$$

(21) $n = 1, 2, \ldots$ $\int_{0}^{\pi} \sin^{2n}\theta = \frac{\pi (2n)!}{(2^n . n!)^2}$

(22) $\int_{0}^{2\pi} e^{-\cos\theta} . \cos(n\theta + \sin\theta)\, d\theta = \frac{2\pi(-1)^n}{n!}$

(23) $a > b > 0$ ஆனால் $\int_{0}^{2\pi} \frac{\sin^2\theta\, d\theta}{a + b\cos\theta} = \frac{2\pi}{b^2} \left[a - \sqrt{a^2 - b^2}\right]$

(24) $a > 1$ ஆனால் $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a\cos\theta\, d\theta}{a + \cos\theta} = 2\pi a \left[1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 - 1}}\right]$

(25) $a > 0$ ஆனால் $\int_{0}^{\infty} \frac{\cos x\, dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi e^{-a}}{2a}$

(26) $a > 0,\ b > 0$ ஆனால் $\int_{0}^{\infty} \frac{\cos ax\, dx}{(x^2 + b^2)^2} = \frac{\pi(1 + ab)}{4b^3 e^{ab}}$

(27) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x\, dx}{x^2 - 2x + 5} = \pi (\sin 1) / 2e^2$

(28) $m>0$ ஆனால் $$\int_0^\infty \frac{\cos mx\, dx}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi(1+m)e^{-m}}{4}$$

(29) $$\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+x^2+1} = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$$

(30) $$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(x^2+4x+5)^2} = \frac{\pi}{2}$$

(31) $$\int_0^\infty \frac{x\sin mx}{x^4+a^4}\,dx = \frac{\pi}{2a^2}\, e^{-(ma/\sqrt{2})} \cdot \sin\left(\frac{ma}{\sqrt{2}}\right)$$

(32) $\lambda > 0$ ஆனால், $$\int_0^\infty \frac{\cos \lambda x\, dx}{1+x^2+x^4}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{3}} \exp\left(-\frac{\lambda\sqrt{3}}{2}\right) \sin\frac{(\pi+3\lambda)}{6}$$

(33) $a > 0$ ஆனால் $$\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x}{a^2-x^2}\,dx = \pi\,\frac{\sin a}{a}$$

(34) $$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x\, dx}{x^2} = \frac{\pi}{2}$$

(35) $$\int_0^\infty \frac{x^{1/6}\log x\, dx}{(1+x)^2} = 2\pi - \frac{\pi^2}{\sqrt{3}}$$

(36) $$\int_0^\infty \frac{(\log x)^2}{1+x+x^2} = \frac{16\pi^3}{81\sqrt{3}}$$

(37) $$\int_0^\infty \frac{\sin x^2}{x}\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

(38) $$\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

(39) $$\int_0^\infty \frac{\sin x^2 + \cos x^2 - 1}{x^2}\,dx = 0.$$

(40) $$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\log x}{(1+x)^2}\,dx = \pi = 2\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\,dx}{(1+x)^2}$$

(41) $$\int_{-\infty}^\infty \frac{a\cos x + x\sin x}{x^2+a^2}\,dx = 2\pi e^{-a}$$

(42) $$\int_{-\infty}^\infty \frac{-a\cos x + x\sin x}{x^2+a^2}\,dx = 0.$$

(43) $$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{\sinh x} = \frac{\pi^2}{4}$$

(44) $$\int_{-\infty}^\infty e^{-(x+ib)^2}\,dx = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

(45) $$\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2+a^2}\,dx = \frac{\pi \log 2}{2a}$$

(46) $$\int_0^\infty \frac{\log x\,dx}{x^2+1} = 0$$

(47) $$\int_0^\infty \frac{\log x\,dx}{(x^2+1)^2} = -\frac{\pi}{4}$$

(48) $$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{e^{2\pi x}-1}\,dx = \frac{1}{4}\coth\frac{a}{2} - \frac{1}{2a}$$

(49) $$\int_0^1 \frac{dx}{(x^2-x^3)^{1/3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

(50) $$\int_0^\infty \frac{\log(x^2+1)}{x^2+1} = \pi \log 2.$$

(51) 5·11 மாதிரி 10-ல் உள்ள வளைவரையை உபயோகித்துச் செய்க:

$0 < a < 2$ ஆனால்,

(i) $$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x+x^2} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\,\frac{\cos\left(\dfrac{2\pi a+\pi}{6}\right)}{\sin \pi a}$$

(ii) $$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1-x+x^2} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\,\frac{\sin\left(\dfrac{2\pi a+\pi}{3}\right)}{\sin \pi a}$$

இதனை 5·11 மாதிரி 7-ல் உள்ள வளைவரையை உபயோகித்தும் செய்யலாம். $\dfrac{z^{a-1}}{1+z+z^2}$ -ன் தொகையீட்டைக் கணித்து மெய், கற்பனைப் பகுதிகளைச் சமன் செய்க.

14. $f(z) = z^5 - 3iz^2 + 2z - 1 + i$.

C என்பது எல்லாப் பூச்சியங்களையும் உள்ளடக்கிய அடைத்த வளைகோடு.

$$\int_C \frac{f'(z)\ dz}{f(z)} = 10\,\pi i$$ என நிரூபி.

15. C என்பது $|z| = 5$ என்ற வட்டம்.

$f(z) = z^4 - 2z^3 + z^2 - 12z + 20$ ஆனால்,

$$\int_C \frac{f'(z)\,.\,z\,dz}{f(z)} = 4\pi i$$ என நிரூபி.

16. C என்பது $|z| = \pi$ என்ற வட்டம்.

$f(z) =$ (i) $\sin \pi z$ (ii) $\cos \pi z$ (iii) $\tan \pi z$

ஆனால் $\displaystyle\int_C \frac{f'(z)\,dz}{f(z)}$ -ஐக் கண்டுபிடி.

விடை (i) $14\,\pi i$ (ii) $12\,\pi i$ (iii) $2\,\pi i$

17. $z^4 + z + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களில் ஒன்று முதல் காற்பகுதியில் உள்ளது என நிரூபி.

18. $z^3 + iz + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் முதலாம், இரண்டாம், நான்காம் காற்பகுதிகளில் உள்ளன என நிரூபி.

19. (i) $z^4 + z^3 + 1 = 0$ (ii) $e^{-z} = z - (1+i)$ என்ற சமன்பாடுகளில் ஒவ்வொரு மூலம் முதல் காற்பகுதியில் உள்ளது என நிரூபி.

20. $z^4 + 4(1+i)z + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் ஒவ்வொரு காற்பகுதியிலும் அமைந்துள்ளன என நிரூபி.

21. $z^5 - 9z^2 + 11 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $|z| = 1$, $|z| = 3$ என்ற வட்டங்களுக்கிடையே அமைந்துள்ளன என நிரூபி.

22. $z^5 - 10z^3 + 5z^2 - 3z - 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் இரு மூலங்கள் $1 < |z| < 9/2$ என்ற பகுதியிலும், மூன்று மூலங்கள் ஆர்கன் தளத்தின் வலப்பகுதியிலும் உள்ளன என நிரூபி.

23. $R(z) < 0$ என்ற பாதித் தளத்தில், $e^z - z^{4r} - 2 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் $2r$ மூலங்கள் உள்ளன என நிரூபி. (r ஒரு மிகை முழு எண் எனக்கொள்க)

24. $ze^z = a$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் முடிவிலியாகும் என நிரூபி. $a = 0$ ஆனால் என்ன மாற்றம் ஏற்படும்?

25. $z \tan z = a$ என்ற சமன்பாட்டில் $a > 0$ ஆனால் ஒரு கற்பனை மூலம் கூட இல்லை என்றும், மெய் மூலங்களின் எண்ணிக்கை முடிவிலி என்றும் நிரூபி.

பலவகைக் கணக்குகள்

26. $z = -1$ல் $\frac{1}{z}\left\{1 + \frac{1}{(z+1)} + \frac{1}{(z+1)^2} + \dots + \frac{1}{(z+1)^n}\right\}$ என்பதன் எச்சம் $-n$ என நிரூபி.

27. $z^5 + 2z^3 + z + 3 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களின் மட்டு 1·6-ஐ விடக் குறைவு என நிரூபி.

28. நிரூபி:
$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - ae^{i\theta}} = 0, \quad |a| > 1$$
$$= 2\pi, \quad |a| < 1$$

29. மடக்கையின் முதல் மதிப்பைக் கொள்க. z-ன் வீச்சம் $-\pi$, $+\pi$க்குமிடையே எனக்கொள்க.

$$\frac{(\log z)^2}{z^2+1}$$ என்ற சார்பு i, $-i$ என்ற புள்ளிகளில்

$$\frac{\pi^2 i}{8}, \quad \frac{-\pi^2 i}{8}$$ எச்சங்களை உடையது என நிறுவி.

30. $|z-5+2i| = 3$ என்ற வட்டத்தில் x^2-y^2+2y என்ற சார்பின் இடை (சராசரி) மதிப்பு 5 எனநிறுவி. [4.17 (iv)ஐப்பார்]

31. ஒரு வட்டத்தின் வழியே ஒரு இசைச்சார்பின் இடை மதிப்பு அச்சார்பின் வட்ட மையத்திலுள்ள மதிப்புக்குச் சம மாகும் என நிறுவி.

32. நிறுவி :
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2\left(\frac{\pi}{6}+2e^{i\theta}\right) d\theta = \frac{1}{4}$$

33. C என்பது $|z| = 3$ என்ற வட்டம்.

$$g(z_0) = \int_C \frac{2z^2-z-2}{z-z_0}$$ ஆனால்

$g(2) = 8\pi i$ என நிறுவி.

34. C என்ற அலகு வட்டத்தில் $z = \exp(i\theta)$ என்பதன் வீச்சம் $-\pi$-ல் இருந்து $+\pi$க்கு மாறுகிறது.

$$\int_C \frac{e^{kz}}{z}\, dz = 2\pi i$$ என்று நிறுவி.

$$\int_0^{\pi} e^{k\cos\theta}\cos(k\sin\theta)\, d\theta = \pi$$ என வருவி.

35. D என்பது ஒரு முக்கோண அரங்கம். இதன் உச்சிப் புள்ளிகள் 0, 2, i என்பவை. $f(z) = (z+1)^2$ ஆனால் $|f(z)|$-ன் உச்ச மதிப்பும், தாழ்ந்த மதிப்பும் முறையே 2, 0என்ற புள்ளிகளில் அடையப்பெறும் என நிறுவி.

36. $n=1, 2, 3, \ldots$ ஆனல்

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\theta = \frac{1.\ 3.\ 5 \ldots (2n-1)}{2.\ 4.\ 6 \ldots (2n)} 2\pi$$ என நிரூபி.

37. a, b என்பவை மெய் மிகை எண்கள். $z^{4p} + az + b = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களில் $2p$ கற்பனை அச்சின் வலப்பகுதியிலும், எஞ்சிய $2p$ மூலங்கள் கற்பனை அச்சின் இடப்பகுதியிலும் உள்ளன என நிரூபி. b என்பது குறையெண் ஆனல் $2p+1$ மூலங்கள் வலப்பக்கத்திலும், $2p-1$ மூலங்கள் இடப்பக்கத்திலும் இருக்கும் என நிரூபி.

38. $w = \log \frac{z-a}{z-b}$ ஆனல், $u=$ மாறிலி என்ற கோடுகள் பொது அச்சு வட்டங்களுக்கு இசைவாக இருக்கும் என்றும், a, b என்பவை இவற்றின் எல்லைப் புள்ளிகள் என்றும் நிரூபி. மேலும் $v=$ மாறிலி என்ற கோடுகள் இவற்றின் பொது அச்சுள்ள குத்து (orthogonal) வட்டங்களாகும் என நிரூபி.

39. $w = \frac{4}{(z+1)^2}$ என்ற மாற்றம் $|z| = 1$ என்ற வட்டத்தை $v^2 = 4\ (1-u)$ என்ற பரவளையமாக மாற்றும் என நிரூபி. வட்டத்தின் உட்புறம் பரவளையத்தின் வெளிப்புறத்திற்கு இசைவாக இருக்கும் என்றும் நிரூபி.

40. $k>1$ ஆனல் $z^n e^{k-z} = 1$ என்ற சமன்பாட்டின் n மூலங்கள் $|z| < 1$ என்ற அரங்கில் உள்ளன என்று நிரூபி.

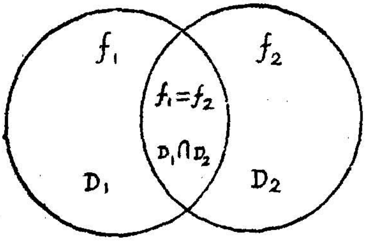
5·20. பகு இயல் சார்பின் தொடர்ச்சி:

f_1, f_2 என்பன D_1, D_2 என்ற அரங்கங்களில் பகுமுறைச் சார்பாக இருக்கட்டும். $D_1 \cap D_2 = E$ என்ற அரங்கில் ஒரு புள்ளியாவது இருக்கட்டும். E-ல் உள்ள எல்லாப் புள்ளிகளிலும் $f_1 = f_2$ ஆக இருந்தால் f_2-ஐ f_1-ன் நேரிடையான பகு இயல் சார்பின் தொடர்ச்சி என்று சொல்வோம்.

$D_1 \cup D_2$ என்ற அரங்கில்

$F(z) = f_1(z) \ldots z$ ஆனது D_1-ல் இருந்தால்
$\qquad\quad f_2(z) \ldots z$ „ D_2-ல் „

என வரையறை செய்தால் F ஆனது $D_1 \cup D_2$-ல் பகுமுறைச் சார்பாகும். ஏனெனில் இவ்வரங்கின் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் இதன் வகைக்கெழுவைக் காண இயலும்.



படம் 25

குறிப்பு: D என்ற அரங்கில் வரையறுக்கப்பட்ட ஒரு பகுமுறைச் சார்புக்கு மற்றோர் அரங்கில் பகுமுறைத் தொடர்ச்சியுடைய சார்பு இருந்தால் அது ஒரே வகையானது என பின்னர் 5·24-ல் நிரூபிப்போம். ஆனால், f என்ற சார்புக்கு D என்ற அரங்கத்திற்குப் புறம்பாகப் பகுமுறைத் தொடர்ச்சி இல்லையெனில் D-யின் வரம்பை f-ன் இயற்கை வரம்பு என வரையறை செய்வோம்.

5·21. எடுத்துக்காட்டு 1:

$f_1(z) = \sum_{0}^{\infty} z^n$ என்பது $|z| < 1$ என்ற D_1 அரங்கில் பகுமுறைச் சார்பாகும். $f_2(z) = 1/(1-z)$ என்பது $z=1$ என்ற புள்ளியை விடுத்து, முழு ஆர்கன் தளத்திலும் f_1-ன் பகுமுறைத் தொடர்ச்சி என நிரூபிப்போம்.

D_1-ல் $\Sigma z^n = 1/(1-z)$ அதாவது, $f_1 = f_2$.

மேலும், D_2 ஆனது $z=1$-ஐ நீக்கிய ஆர்கன் தளமானால், $D_1 \cap D_2 = D_1$. இதில் $f_1 = f_2$. $\therefore f_2$ ஆனது f_1-ன் பகுமுறைத் தொடர்ச்சியாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2:

$$f_1(z) = \sum_{0}^{\infty} z^n \; ; \; f_2(z) = \sum_{0}^{\infty} \tfrac{1}{2} \left(\frac{1+z}{2} \right)^n .$$ மேலும்

D_1, D_2 என்பவை முறையே $|z| < 1$; $|z+1| < 2$ என்ற அரங்கங்களானால் f_2 ஆனது D_2-ல் f_1-ன் பகுமுறைத் தொடர்ச்சியாகும்.

5·22. தேற்றம்:

D என்ற அரங்கில் $f(z)$ ஒரு பகுமுறைச் சார்பாக இருக்கட்டும். Dயின் உள்ளே உள்ள PQ என்ற வில்லில் $f(z)=0$ ஆக இருந்தால், D-யில் உள்ள எல்லாப் புள்ளிகளிலும் $f(z)=0$ ஆகும்.

நிரூபணம்:

PQ-ல் உள்ள a என்ற புள்ளியில் $f(a) = 0$ என கொடுக்கப் பட்டுள்ளது. a என்ற புள்ளியை மையமாகக் கொண்ட C என்ற ஒருங்கல் வட்டத்தை வரை. இவ்வட்டம் D-யின் வரம்பைத் தொடலாம். இவ்வட்டத்தினுளே z என்பது ஏதேனும் ஒரு புள்ளி யானால், டெய்லர் தேற்றத்தின்படி

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \qquad \dots (1)$$

$$\text{இதில், } a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \qquad \dots (2)$$

$f(a) = 0$ ஆனதால் $z=a$ என்ற புள்ளியில் $f(z)=0$. மேலும் f ஒரு பகுமுறைச் சார்பானதால் $z=a$ ஆக இருக்கும்போது

$$f'(z) = 0 = f''(z) = \dots = f^{(n)}(z)$$

$\therefore$ (2)-ல் இருந்து $n=0, 1, 2, \dots$ ஆனுல் $a_n = 0$.

$\therefore$ $f(z) = 0$.

இவ்வாறு, மேலும் பல வட்டங்கள் எடுத்தும் அவற்றுள் வேறு வில்கள் எடுத்தும் D என்ற அரங்கின் முழுவதிலும் $f(z)=0$ என நிரூபிக்கலாம்.

5·23. கிளைத்தேற்றம்:

D என்ற அரங்கில் f_1, f_2 என்ற பகுமுறைச் சார்புகள் D-யின் உட்பகுதியான E-ல் $f_1(z) = f_2(z)$ என்பதற்கிணங்க இருந்தால், D முழுவதிலும் $f_1(z) = = f_2(z)$ ஆக இருக்க வேண்டும்.

5·22-ல் $f(z) = f_1(z) - f_2(z)$ என்று கொண்டால், இதன் நிரூபணம் தெளிவாகிறது.

5·24. பகுமுறைச் சார்பின் தொடர்ச்சி ஒரே வகையானது

D_1 என்ற அரங்கில் f_1 ஆனது பகுமுறைச் சார்பாக இருக்கட்டும். f_2, g_2 என்பவை D_2-ல் f_1-ன் பகுமுறைத் தொடர்ச்சிகளாக இருக்கட்டும். $f_2 = g_2$ என நிரூபிப்போம்.

$D_1 \cap D_2$-ல் $f_1 = f_2$ ஆகவும், $f_1 = g_2$ ஆகவும் இருக்க வேண்டும். மேலும், இவை D_2-ல் பகுமுறைச் சார்புகள்.

$\therefore$ 5·23 கிளைத்தேற்றத்தின்படி $f_2 = g_2$.

எடுத்துக்காட்டு 3:

D_1 என்ற அரங்கில் f_1 ஆனது பகுமுறைச் சார்பாக இருக்கட்டும். f_2, f_3 என்பவை முறையே D_2, D_3 என்ற அரங்கங்களில் f_1-ன் பகுமுறைத் தொடர்ச்சிகளாக இருக்கட்டும். $D_1 \cap D_2 \cap D_3$-ல் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியாவது இருந்தால் $D_2 \cap D_3$-ல் $f_2 = f_3$ என நிரூபி.

f_2, f_3 என்பவை f_1-ன் பகுமுறைத் தொடர்ச்சிகள். ஆகையால் $D_1 \cap D_2$-ல் $f_1 = f_2$; $D_1 \cap D_3$-ல் $f_1 = f_3$.
மேலும், $D_1 \cap D_2 \cap D_3$ என்பது $(D_1 \cap D_2)$, $(D_1 \cap D_3)$ என்பவற்றின் உட்பகுதி என்பது தெளிவு.

$\therefore$ $D_1 \cap D_2 \cap D_3$-ல் $f_1 = f_2 = f_3$.

இப்பொழுது, $D_1 \cap D_2 \cap D_3$ என்பது $D_2 \cap D_3$-ன் உட்பகுதி.

$\therefore$ $D_2 \cap D_3$-ல் $f_2 = f_3$.

எடுத்துக்காட்டு 4:

மெய்யச்சில் I என்ற இடைவெளியில் $f_1(x)$ என்ற சார்பு வரையறுக்கப்பட்டு இருக்கட்டும். I ஆனது D என்ற அரங்கிற்குள்ளேயிருந்து, $f_2(z)$ ஆனது D அரங்கில் $f_1(x)$-ன் பகுமுறைத் தொடர்ச்சியாக இருந்தால் $f_2(z)$ ஒரே வகையானது என நிரூபி.

கூடுமானால், $g_2(z) \neq f_2(z)$ மற்றோர் பகுமுறைத் தொடர்ச்சியாக இருக்கட்டும். அப்படியானால் I என்ற மெய்யச்சுப் பகுதியில் $f_1(x) = f_2(x) = g_2(x)$. இப்பொழுது I என்ற இடைவெளியில் J என்ற அடைத்த இடைவெளி உண்டு. $\therefore$ J-ல் $f_2(x) = g_2(x)$.
$\therefore$ 5·24-ல் இருந்து $f_2(z) = g_2(z)$.

துணை முடிவு 1 : $f(x) = e^x$ என்ற அடுக்குக் குறி சார்பு மெய்யச்சில் I என்ற இடைவெளியில் வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது என அறிவோம். இப்போது,

$\exp(z) = e^x (\cos y + i \sin y) \ldots (1)$ என்பது $f(x)$-ன் பகு முறைத் தொடர்ச்சி என நிரூபிப்போம்.

$\exp(z)$ ஆனது எல்லா வரம்புடைய அரங்கங்களிலும் பகுமுறைச் சார்பாகும். ஆகவே I-ஐ உள்ளடக்கிய D என்ற அரங்கிலும் அது பகுமுறைச் சார்பாகும். மேலும் I-ல் $y=0$ ஆகையால்

$$\exp(x) = e^x = f(x).$$

$\therefore$ $\exp(z)$ ஆனது $f(x)$-ன் பகுமுறைத் தொடர்ச்சியாகும். இது ஒரே வகையானது. ஆகவே

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$$

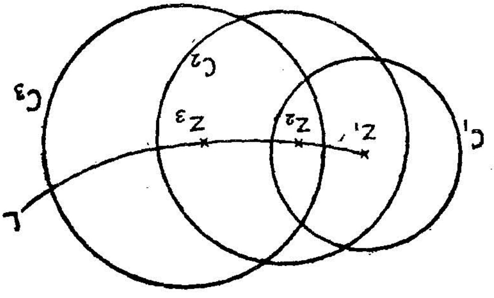
என்பதுதான் ஒரே பொருத்தமான வரையறையாகும்.

துணை முடிவு 2: z-ன் மெய் மதிப்புகளுக்கு $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ ஆனால், z-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் இது பொருந்தும் என நிரூபி.

முன் மாதிரி, மெய்யச்சில் I என்ற இடைவெளியை உள்ளடக்கிய D என்ற அரங்கத்தை எடுத்துக்கொள்.

$f(z) = \sin^2 z + \cos^2 z - 1$ என்பது D-ல் ஒரு பகுமுறைச் சார்பு. மெய்யச்சில், அதாவது I-ல் $f(z)=0$. $\therefore$ D-ல் $f(z)=0$. D-ஐ நம் இஷ்டப்படி எடுத்துக் கொள்ளலாமாதலின் z-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ ஆகும்.

5·25. அடுக்குத்தொடர் மூலம் பகுமுறைத் தொடர்ச்சி.



படம்—26.

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_1)^n \qquad \ldots (1)$$

என்ற தொடரை எடுத்துக் கொள்.

$$R_1 = \underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \left| a_n \right|^{1/n} \text{ ஆனால், } |z-z_1| = R_1$$

என்ற C_1 வட்டத்தில் (1) ஒருங்கல் தொடராகும்.

இப்பொழுது, z_1 வழி செல்லும் L என்ற வில்லில் C_1-க்குள் இருக்கும்படியாக z_2 என்ற புள்ளியை எடுத்துக்கொள். (1)-ல் இருந்து,

$$f_1(z_2),\ f_1'(z_2),\ f_1''(z_2),\ \ldots,\ f_1^{(n)}(z_2)$$

ஆகியவற்றைக் கண்டுபிடிக்க இயலும்.

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_2)^n \qquad \ldots (2)$$

எனக் கொள்க. இதில் $b_n = \dfrac{f_1^{(n)}(z_2)}{n!}$ ஆக இருக்கட்டும்.

$R_2 = \underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \left| b_n \right|^{1/n}$ ஆனால், $|z-z_2| = R_2$ என்ற C_2 வட்டத்தில் (2) ஆனது ஒருங்கல் தொடராகும்

மேலும், $C_1 \cap C_2$-ல் $f_1(z) = f_2(z)$ என்பதைக் கவனி.

$\therefore$ f_2 ஆனது C_2-ல் f_1-ன் பகுமுறைத் தொடர்ச்சியாகும்.

இதே விதமாக, f_3 என்ற சார்பு C_3-ல் f_2-ன் பகுமுறைத் தொடர்ச்சியாக இருக்கும்படி கண்டு பிடிக்கலாம். இவ்வாறு, வெல்வேறு அடுக்குத் தொடர்களைப் பகுமுறைத் தொடர் சார்பு களாகக் காண இயலும்.

இந்த அடுக்குத் தொடர்களின் கணத்தை $f(z)$ என்ற பகு முறைச் சார்பாகவும், ஒவ்வொரு அடுக்குத் தொடரையும் இதன் உறுப்பு (element) என்றும் குறிப்பிடுவது வழக்கம்.

எடுத்துக்காட்டு 5 :

$$f_1(z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots = \log(1+z)$$

என்பது $|z| < 1$ என்ற C_1 வட்டத்தில் ஒருங்கல் தொடராகும். இதன் பகுமுறைத் தொடர்ச்சியாக

$$f_2(z) = \log 2 - \frac{(1-z)}{2} - \frac{(1-z)^2}{2.2^2} - \frac{(1-z)^3}{3.2^3} - \ldots$$

என்ற சார்பைக் கொள்ளலாம் என நிரூபி.

$$f_2(z) = \log 2 + \log \left\{ 1 - \left(\frac{1-z}{2} \right) \right\} \qquad \ldots \quad (1)$$

இது $|1-z| < 2$ என்ற C_2 வட்டத்தில் ஒருங்கல் தொடராகும்.

மேலும், $f_2(z) = \log 2 \times \frac{\{2-1+z\}}{2} = \log(1+z)$

ஆகவே, $f_1(z)$, $f_2(z)$ ஆகியவை C_1, C_2 வட்டங்களில் பகுமுறைச் சார்புகள் என்றும், $C_1 \cap C_2$-ல் $f_1(z) = f_2(z)$ எனவும் நிரூபித்துள்ளோம். $\therefore$ f_2 ஆனது f_1-ன் பகுமுறைத் தொடர்ச்சியாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6:

$$f_1(z) = 1 + az + a^2z^2 + \ldots = \frac{1}{1-az} \qquad \ldots \quad (1)$$

$$f_2(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{(1-a)z}{(1-z)^2} + \frac{(1-a)^2 z^2}{(1-z)^3} - \ldots$$

$$= \frac{1}{(1-z)} \left\{ 1 - \left(\frac{1-a}{1-z} \right) z + \left(\frac{1-a}{1-z} \right)^2 z^2 - \ldots \right\}$$

$$= \frac{1}{(1-z)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{(1-a)z}{(1-z)}}$$

$$= \frac{1}{(1-z)} \cdot \frac{(1-z)}{(1-z+z-az)} = \frac{1}{1-az}$$

இதில் $f_1(z)$ ஆனது $|z| = \frac{1}{|a|}$ என்ற புள்ளிகளை விடுத்து, மீதி இடத்தில் பகு முறைச்சார்பாகும்.

$\therefore$ $|z| = \frac{1}{|a|}$ என்ற C_1 வட்டத்தில் $f_1(z)$ பகுமுறைச் சார்பாகும்.

மேலும், $\left| \frac{z(1-a)}{(1-z)} \right| < 1$ ஆனால்

$f_2(z)$ ஒருங்கல் தொடராகும். எனவே

$\left| \frac{z(1-a)}{(1-z)} \right| = 1$ என்ற C_2 வட்டத்தில் f_2 பகுமுறைச் சார்பாகும்.

$$\left| \frac{z(1-a)}{(1-z)} \right| = 1.$$ இதில் a மெய்யெண் எனக்கொள்க.

$$\therefore \quad \frac{z(1-a)}{(1-z)} \cdot \frac{\bar{z}(1-a)}{(1-\bar{z})} = 1.$$

$$\therefore \quad (1-a)^2 z\bar{z} = 1 - (z+\bar{z}) + z\bar{z}$$

$$(x^2+y^2)(1-a)^2 = 1 - 2x + x^2 + y^2$$

$$\therefore \quad x^2 + y^2 - \frac{2x}{a(2-a)} + \frac{1}{a(2-a)} = 0$$

$\therefore$ C_2 என்ற வட்டத்தின் மையம் $\left\{ \frac{1}{a(2-a)}, 0 \right\}$

என்றும், ஆரம் $\frac{1-a}{a(2-a)}$ என்றும் அறிகிறோம்.

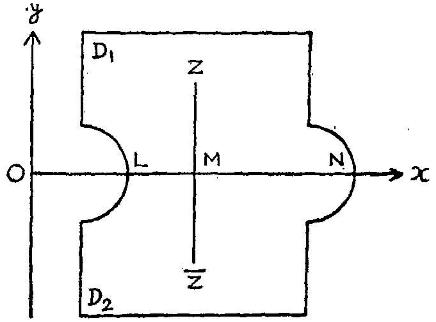
C_1க்கும், C_2க்கும் பொதுவான பகுதியில்

$$f_1(z) = f_2(z) = \frac{1}{1-az}$$ என்றும் பார்த்தோம்.

$\therefore$ f_2 ஆனது f_1-ன் பகுமுறைத் தொடர்ச்சியாகும்.

5·26. சுவார்ட்சின் பிரதிபிம்பத் தத்துவம்

$LMN = I$ என்பது மெய்யச்சில் உள்ள இடைவெளியாக இருக்கட்டும். D_2 என்ற அரங்கம் மெய்யச்சில் D_1 என்ற



படம் 27.

அரங்கத்தின் பிம்பமாகவும் $\bar{D}_1 \cap \bar{D}_2 = I$ என்ற அடைத்த இடைவெளியாகவும் இருக்கட்டும். f என்ற சார்பு D_1-ல் பகுமுறைச் சார்பாகவும், $D_1 \cup I$-ல் தொடர்புடைச் சார்பாகவும் (continuous function) இருக்கட்டும்.

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & z \text{ ஆனது } D_1 \cup I\text{-ல் இருந்தால்} \\ \overline{f(\bar{z})} & z \text{ ஆனது } D_2\text{-ல் இருந்தால்} \end{cases}$$

என்ற சார்பு D_2-ல் f-ன் பகுமுறைத் தொடர்ச்சியாகும்.

நிரூபணம்:

(i) LMN என்ற கோட்டில்

$$f(z) = \overline{f(\bar{z})} = F(z) \quad \ldots \quad (1)$$

என்றும் (ii) D_2-ல் $F(z)$ பகுமுறைச் சார்பு என்றும் நிரூபித்தால் போதுமானது.

(i) LMN என்ற கோட்டில் $z = x$

$$\therefore \; f(x) = \overline{f(\bar{x})} = F(x)$$

$$\therefore \; f(z) = \overline{f(\bar{z})} = F(z).$$

(ii) $f(z) = f(x+iy) = u(x, y) + iv(x, y) \quad \ldots \quad (2)$

ஆக இருக்கட்டும். $f(z)$ பகுமுறைச் சார்பாதலின்

$$u_x = v_y; \quad u_y = -v_x \quad \ldots \quad (3)$$

மேலும், இப்பகுதி வகைக்கெழுக்கள் தொடர்புடைச் சார்புகள். இப்பொழுது, (2)-ல் இருந்து

$$f(\bar{z}) = f(x-iy) = u(x, -y) + iv(x, -y)$$

$$\therefore \; \overline{f(\bar{z})} = F(z) = u(x, -y) - i\,v(x, -y)$$

D_2-ல் $F(z)$ பகுமுறைச் சார்பாக இருக்க வேண்டுமானுல்

$$\frac{\partial u(x, -y)}{\partial x} = \frac{\partial\{-v(x, -y)\}}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u(x, -y)}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x}\{-v(x, -y)\}$$

ஆக இருக்க வேண்டும் $\ldots \quad (4)$

அதாவது, $u_x = v_y$; $-u_y = v_x$ ஆக இருக்க வேண்டும். இது (3)-ன்படி உண்மையாகும். எனவே, நிருபணம் பூர்த்தியாகிறது.

5·27. தேற்றம்:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$ என்ற அடுக்குத் தொடரின் ஒருங்கல் ஆரம் முடிவிலியாக இல்லையானல் $f(z)$-ன் ஒருங்கல் வட்டத்தில் ஒரு சிறப்புப் புள்ளியாவது இருக்க வேண்டும்.

நிரூபணம்:

$|z-a| = R$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட அடுக்குத்தொடரின் ஒருங்கல் வட்டமான C ஆக இருக்கட்டும். C-யில் ஒரு சிறப்புப் புள்ளியாவது இருக்க வேண்டும் என நிரூபிக்க வேண்டும்.

Cயில் ஒரு சிறப்புப் புள்ளியும் இல்லையெனக் கொள்க. பகுமுறைத் தொடர்ச்சிபடி, $f_1(z)$ என்ற பகுமுறைத் தொடர்ச்சி சார்பை a-ஐ மையமாகவும், $R_1 (>R)$-ஐ ஆரமாகக் கொண்ட C_1 என்ற பெரிய வட்டத்தில் பகுமுறைச் சார்பாக இருக்கும்படியும் Cயில் $f_1(z) = f(z)$ என இருக்கும்படியும் கண்டுபிடிக்க இயலும். எனவே $f_1(z)$-ஐ டெய்லர் தொடராக $(z-a)$-ன் அடுக்குகளில் விரித்தெழுத, அது C_1-ன் எல்லாப் பகுதிகளிலும் ஒருங்கல் தொடராகும். இது ஒரு முரண்பாடு. ஏனெனில் C தான் அதன் ஒருங்கல் வட்டம் என்பது நம் கொள்கை. எனவே தேற்றத்தின் உண்மை விளங்குகிறது.

மாதிரிக் கணக்குகள்

மாதிரி 1: $R(z) > 0$ ஆர்கன் தளத்தின் வலது பாதி அரங்கில்

$$f(z) = \int_0^{\infty} t^3 e^{-zt}\, dt$$ என்ற சார்பு பகுமுறைச் சார்பு என நிரூபி. அதன் பகுமுறைத் தொடர்ச்சி இடது பகுதியில் எது எனக் கண்டுபிடி.

$$f(z) = \underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \int_0^{n} t^3 e^{-zt}\, dt$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[t^3 \left(\frac{e^{-zt}}{-z} \right) - 3t^2 \left(\frac{e^{-zt}}{z^2} \right) + 6t \left(\frac{e^{-zt}}{-z^3} \right) - 6 \left(\frac{e^{-zt}}{z^4} \right) \right]_0^n$$

எல்லை = $\lim$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{-n^3 e^{-nz}}{z} - \frac{3n^2 e^{-nz}}{z^2} - \frac{6n e^{-nz}}{z^3} + \frac{6}{z^4} \right]$$

$= \dfrac{6}{z^4}$. இங்கு $R(z) > 0$ என்பதைக் கவனி.

இப்பொழுது, $F(z) = 6/z^4$ என்பது தான் $f(z)$-ன் பகுமுறைத் தொடர்ச்சி என்பது தெளிவு. ஏனெனில், $R(z) > 0$ ஆனால் $F(z) = f(z)$ எனப் பார்த்தோம். மேலும் $z = 0$-ஐத் தவிர மீதி யான பகுதியில் $F(z)$ ஒரு பகுமுறைச் சார்பு என எளிதில் நிரூபிக் கலாம்.

மாதிரி 2: மாறிலியல்லாத $f(z)$ ஆனது z-தள முழுவதும் பகுமுறைச் சார்பாக இருக்கட்டும். C என்ற அடைத்த வளை கோட்டின் உட்புறம் D ஆகவும், வெளிப்புறம் D' ஆகவும் இருக்கட்டும்.

(i) $f_1(t) = \int_C \dfrac{f(z)\,dz}{(z-t)^2}$ என்பது D-யில் பகுமுறைச் சார்பு என நிரூபி. $t \in D$ எனக் கொள்க.

(ii) $g_1(t) = \int_C \dfrac{f(z)\,dz}{(z-t)^2}$ என்பது D'-ல் பகுமுறைச் சார்பு என நிரூபி. இதில் $t \in D'$ எனக் கொள்க.

(iii) f_1-ன் பகுமுறைத் தொடர்ச்சியான f_2 ஆனது g_1-க்குச் சமமல்ல என நிரூபி.

(i) t ஆனது D-யில் இருக்கட்டும்.

$$f_1(t) = \int_C \frac{f(z)\,dz}{(z-t)^2}$$

$= 2\pi i f'(t)$, காஷி தொகையீட்டு விதி.

இதில் $f'(t)$ ஒரு பகுமுறைச் சார்பு.

$\therefore$ $f_1(t)$ பகுமுறைச் சார்பாகும்.

(ii) t ஆனது D'-ல் இருக்கட்டும்.

$$\therefore \quad g_1(t) = \int_C \frac{f(z)\,dz}{(z-t)^2} = 0.$$

... காஷி கூர்சா தேற்றம்.

$\therefore$ $g_1(t)$ பகுமுறைச் சார்பு என்பது தெளிவு.

(iii) f' உம் z-தளம் முழுவதிலும் பகுமுறைச் சார்பாகும். எனவே $2\pi i\, f'(t)$-ஐ f_1-ன் பகுமுறைத் தொடர்ச்சியாகக் கொள்ளலாம்.

$t \varepsilon D$ ஆனால் $2\pi i f'(t) = f_1(t)$

$t \varepsilon D'$ ஆனால் $2\pi i f'(t) = f_2(t)$.

$f_2(t) = g_1(t)$ ஆனால்

$2\pi i\, f'(t) = 0$ ஆகும்.

$\therefore$ $f(t)$ ஒரு மாறிலியாகும். இது கொள்கைக்கு முரண்பாடு.

$\therefore$ $f_2(t) \neq g_1(t)$

மாதிரி: 3. $|z| > 0$: $0 \leq$ வீச்சம் $z < \pi$ என்ற அரங்கில் உள்ள $f(z) = \log z = \log|z| + i$ வீச்சம் z என்ற சார்பின் பகுமுறைத் தொடர்ச்சியை $|z| > 0$: $-\pi <$ வீச்சம் $< \pi$ என்ற அரங்கில் கண்டுபிடி.

D என்பது $|z| > 0$; $0 \leq$ வீச்சம் $z < \pi$ என்ற அரங்கமாகவும், D' என்பது $|z| > 0$, $-\pi <$ வீச்சம் $z < 0$ என்ற அரங்கமாகவும் இருக்கட்டும்.

D' என்பது மெய்யச்சில் D-யின் பிம்பமாகும். மேலும், $f(z)$ ஆனது D-யில் பகுமுறைச் சார்பு என்பது தெளிவு. $x > 0$ ஆகவுள்ள மெய்யச்சின் பகுதியை I எனக் கொண்டால், I-ல் $f(z)$ ஒரு தொடர்புடைச் (continuous) சார்பு என்பதும் தெளிவு. எனவே சுவார்ட்சின் பிரதிபிம்பத் தத்துவத்தின்படி

$$F(z) = \log|z| + i \text{ வீச்சம் } z \qquad z \varepsilon D \cup I$$

$$= \overline{\log|\bar{z}| + i \text{ வீச்சம் } \bar{z}} \qquad z \varepsilon D'$$

$$= \log|z| + i \text{ வீச்சம் } z \qquad z \varepsilon D'$$

என்பது $f(z)$-ன் பகுமுறைத் தொடர்ச்சியாகும்.

மாதிரி: 4. $\overline{f(\bar{z})} = f(z)$ ஆனால் $f(x)$ ஒரு மெய்யெண் என நிரூபி.

$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ எனக்கொள்க.

$\therefore\ f(\bar{z}) = f(x-iy) = u(x,-y) + iv(x,-y).$

$\overline{f(\bar{z})} = u(x,-y) - iv(x,-y).$

ஆனால் $\overline{f(\bar{z})} = f(z)$ ... கொள்கை.

$\therefore\ u(x,-y) - iv(x,-y) = u(x,y) + iv(x,y)$

இதில் $y=0$ என்று பிரதியிடு.

$u(x,0) - iv(x,0) = u(x,0) + iv(x,0)$

$\therefore\ v(x,0) = 0.$

இப்பொழுது, $f(x) = u(x,0) + iv(x,0)$

$= u(x,0)$

= ஒரு மெய்யெண்.

மாதிரி: 5. $f(z) = 1+z+z^2+z^4+z^8+\ldots$

$$= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$$

என்ற சார்புக்கு $|z| = 1$ இயற்கை வரம்பு என நிரூபி.

$f(z) = 1+z+z^2+z^4+z^8+\ldots$

$= z+f(z^2)$

$= z+z^2+f(z^4)$

$= z+z^2+z^4+f(z^8) = \ldots$

எனவே, $f(z)$-ன் சிறப்புப் புள்ளிகள்

$z = 1, z^2 = 1, z^4 = 1, z^8 = 1, \ldots$

ஆகியவற்றால் பெறப்படும். இவை அனைத்தும் $|z| = 1$-ல் உள்ளன. ஆகவே, அலகு வட்டத்தின் எந்தச் சிறிய வில்லை எடுத்துக் கொண்டாலும், அதில் எண்ணற்ற சிறப்புப் புள்ளிகளைக் காணலாம். ஆதலால், இதற்கப்பால் பகுமுறைத் தொடர்ச்சி காண இயலாது. $\therefore$ $|z| = 1$ இச்சார்பின் இயற்கை வரம்பாகும்.

பயிற்சி 5. (இரண்டாம் பகுதி)

1. பின்வரும் தேற்றங்களை மெய்யச்சில் உண்மையெனக் கொண்டு z-யின் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் நிறுவி.

(i) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos z$

(ii) $\sin 2z = 2\sin z \cos z$

(iii) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1.$

(iv) $\sinh z + \cosh z = e^z.$

2. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(z+1)^n$ என்ற சார்பின் தொடர்ச்சியை $|z+1| = 1$ என்ற வட்டத்திற்கு அப்பால் கண்டுபிடி.
விடை $1/z^2$.

3. $|z| < 1$ என்ற அரங்கில் உள்ள $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{4n}$ என்ற சார்பின் பகுமுறைத் தொடர்ச்சி $\frac{1}{1-z^4}$ என்றும் அதன் அரங்கமானது, [ஆர்கன் தளம் $-\{1, -1, i, -i\}$] என்றும் நிறுவி.

4. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$; $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(2-i)^{n+1}}$

ஆனல் f, g என்பவைகளில் ஒவ்வொன்றும் மற்றதன் பகுமுறைத் தொடர்ச்சி என நிறுவி.

5. $|z| < 1$ என்ற அரங்கில்

$z - z^2 + z^3 - z^4 + \ldots$

ஒரு பகுமுறைச் சார்பு என நிறுவி. இதன் பகுமுறைத் தொடர்ச்சியைக் கண்டுபிடி.

விடை: $z/(1+z)$

6. $\frac{1}{a} + \frac{z}{a^2} + \frac{z^2}{a^3} + \ldots$ என்பதன் பகுமுறைத் தொடர்ச்சி $\frac{1}{a-z}$ என நிறுவி.

7. $z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots$ என்ற சார்பின் பகுமுறைத் தொடர்ச்சி

$$\tfrac{1}{2}\log(1+b^2) + i\tan^{-1}b + \frac{z-ib}{1+ib} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{z-ib}{1+ib}\right)^2 + \dots$$

என நிரூபி. இதில் b ஒருமெய்யெண் எனக் கொள்க.

8. $R(z) > 0$ என்ற அரங்கில் உள்ள

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-zt}\,dt$$ என்ற சார்பின் பகுமுறைத் தொடர்ச்சியைக் கண்டு பிடி. அதன் அரங்கத்தையும் வரையறு.

விடை. $1/z$; ஆர்கன் தளம் — $\{0\}$

9. $$f(z) = \int_0^\infty (e^{-t} + t - 1)\,e^{-zt}\,dt$$

என்பது $R(z) > 0$ என்ற அரங்கில் பகுமுறைச் சார்பாக உள்ளது. இதன் பகுமுறைத் தொடர்ச்சியை $\{0, -1\}$ என்ற புள்ளிகள் நீங்கலாக ஆர்கன் தளம் முழுவதும் வியாபிக்கத் தக்கதாகக் கண்டு பிடி.

விடை. $1/z^2(z+1)$

10. k என்பது மெய்யெண் ஆனால், $R(z) > 0$ என்ற அரங்கில் உள்ள

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-zt}\sin kt\,dt$$ என்ற சார்பின், பகுமுறைத் தொடர்ச்சி சார்பின் எளிய துருவங்கள் $\pm ik$ என நிரூபி.

11. $R(z) > 0$ என்ற அரங்கில் உள்ள

$$f(z) = \int_0^\infty t\,e^{-zt}\,dt$$ என்ற சார்பின் பகுமுறைத் தொடர்ச்சி $1/z^2$ என நிரூபி.

12. $|z| > 0;\ 0 \leq$ வீச்சம் $z < \pi$ என்ற தளத்தில்

$f(z) = z^{\frac{1}{2}} = |z|^{\frac{1}{2}}\ e^{(i/2)\text{ வீச்சம் } z}$ என்ற சார்பின் பகுமுறைத் தொடர்ச்சியானது, $|z| > 0;\ -\pi <$ வீச்சம் $z < \pi$ என்ற தளத்தில் $|z|^{\frac{1}{2}}\ e^{(i/2)\text{ வீச்சம் } z}$ என நிரூபி.

13. D ஆனது மெய்யச்சில் ஒரு பகுதியை உடையதாகவும், மெய்யச்சைப் பொறுத்து சமச்சீர் (Symmetry) உடையதாகவும் இருக்கட்டும். $f(z)$ ஆனது Dயில் ஒரு பகுமுறைச் சார்பாகும்.

(i) $f(x)$ ஒரு மெய்யெண் ஆனால்

$f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ என நிரூபி.

(ii) $f(x)$ ஒரு பூரண கற்பனை எண் ஆனால்

$\overline{f(z)} = -f(\bar{z})$ என நிரூபி.

14. $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$ என்பதன் இயற்கை வரம்பு $|z| = 1$ என நிரூபி.

குறிப்பு: p என்னும் முழு எண்ணை, $q!$-ஐ விடச் சிறியதாகக் கொண்டு z ஆனது $\exp\left(\frac{2\pi ip}{q!}\right)$-ஐ அணுகும் போது, $f(z)$ ஆனது ∞-ஐ அணுகுகிறது என நிரூபி.

6. கோணம் மாறு மாற்றம்

6·1. ஒன்றுக் கொன்று உருமாற்றம்

$w = f(z) = u+iv$ என்ற சார்பை வரைபடம் மூலம் விளக்கும்போது, உருமாற்றம் எனலாம்.

$y = f(x)$ என்ற மெய்யான சார்பைக் குறிப்பிட xy-தளம் போதுமானது. ஆனால் z என்பதே x, y என்ற இரு மாறிகளாலானது. w-உம் u, v என்ற இரு மாறிகள் கொண்டது. ஆகவே $w = f(z)$ ஐக்-குறிப்பிட 4 வகையுள்ள தளம் தேவைப்படும்! இதனைச் சமாளிக்க நாம் z-தளம், w-தளம் என்ற இருதளங்களையும் பயன்படுத்துகிறோம்.

$z = x+iy$ ஆகவும், $w = f(z)$ என்பது ஒரே மதிப்புடைய z-ன் சார்பாகவும் இருக்கட்டும். $f(x+iy) = u+iv$ ஆனால், இதன் மெய்யான, கற்பனைப் பகுதிகளைச் சமன்செய்யுங்கால்

$$u = u\ (x, y); \quad v = v\ (x, y)$$

என்ற மெய்யான சார்புகள் கிடைக்கின்றன. இவைகள் தாம் P என்ற புள்ளியை z-தளத்திலிருந்து, P' என்ற புள்ளியாக w-தளத்தில் மாற்ற உதவுகின்றன. z-தளத்தில் உள்ள ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளி P-க்கு இசைவாக, w-தளத்தில் P' என்ற ஒரே புள்ளிதான் இருக்கவேண்டும். மறுதலையாக w-தளத்தில் உள்ள P'-க்கு இசைவாக, z-தளத்தில் P என்ற ஒரே புள்ளிதான் இருக்க வேண்டும். இதை நாம் ஒன்றுக் கொன்று உருமாற்றம் என்கிறோம். இப்போது P'-ஐ P-யின் பிம்பம் என்பது வழக்கம்.

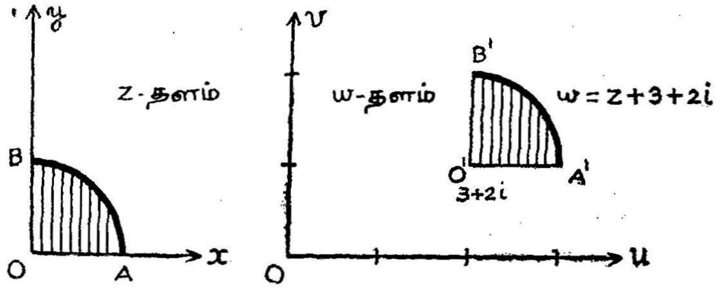
குறிப்பு: எல்லா உருமாற்றங்களும் ஒன்றுக்கொன்று உருமாற்றமாக இராது எடுத்துக்காட்டாக,

$$u = x^2;\ v = y^2$$

என்ற உருமாற்றத்தைக் கவனி. xy-தளத்தில் உள்ள $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$, $(1, -1)$ என்ற 4 புள்ளிகளும் w தளத்தில் உள்ள $(1, 1)$ என்ற ஒரே புள்ளியாக மாறுகிறது. ஆனால், z தளத்திலுள்ள முதல் காற்பகுதியை மட்டும் அரங்கமாக எடுத்துக்கொண்டால், இது ஒன்றுக்கொன்று உருமாற்றமாகும்.

6·2. சில எளிய உருமாற்றங்கள்—I

(i) $w=z+3+2i$ என்ற உருமாற்றத்தைக் கவனி. இது வெறும் இடப்பெயர்ச்சி யாகும். மெய்யச்சு வழியே 3 அலகுகளும், கற்பனை அச்சு வழியே 2 அலகுகளும் நகர்த்தப்பட்ட பழைய வளைவரையே கிடைக்கும் என்பது தெளிவு. இம்மாற்றத்தினால் இரு தளங்களிலுள்ள வளைவரைகளின் உருவம், அளவு, திசை கோட் சேர்க்கை (orientation) ஆகியவை பாதிக்கப்படவில்லை என்பது தெளிவு.



படம் 28.

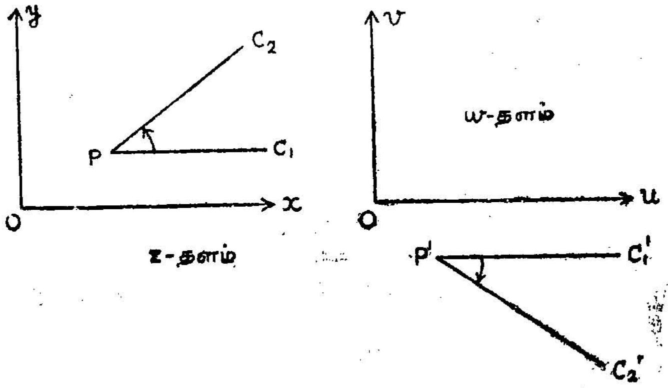
6·3. கோண அளவு மாறு உருமாற்றமும், கோண மாறு நிலையுறு மாற்றமும்:

$u=u(x, y)$; $v=v(x, y)$ என்ற மாற்றங்கள் z-தளத்தில் உள்ள P என்ற புள்ளியில் வெட்டிக் கொள்ளும் C_1, C_2 என்ற வளைவரைகளை w-தளத்தில் P' என்னும் புள்ளியில் வெட்டிக் கொள்ளும் C_1', C_2' என்ற வளைவரைகளாக மாற்றட்டும். இப்போது P யில் C_1-க்கும், C_2-க்கும் இடையே உள்ள கோணம் P'-ல் C_1'-க்கும், C_2'-க்கும் இடையே உள்ள கோணத்திற்கு அளவில் மட்டும் சமமாக இருந்தால் இதனைக் கோண அளவு மாறு (isogonal) உருமாற்றம் என்போம்.

இக்கோணங்கள் அளவில் மட்டுமன்றி குறியிலும் (sign) மாறுபடாமல் இருந்தால் இதனைக் கோண மாறு நிலையுறு மாற்றம் (conformal) என்போம். இப்போது வளைவரைகள் ஒரே விதமாகக் கோண சுழற்சி அடைவதால், P, P' என்பவைகளின் (சிறிய) சுற்றுப்புறங்களில் வளைவரைகள் ஒரே ரூபம் உடையவை. சில ஆசிரியர்கள் இந்த வேற்றுமைகளை வலியுறுத்துவதில்லை. நாம் கோண மாறு நிலையுறு மாற்றத்தை இனிமேல் கோண மாறு மாற்றம் எனச் சுருக்கிக் கூறுவோம்.

6·4. சில எளிய உருமாற்றங்கள்—II

(ii) $w=\bar{z}$ என்ற உருமாற்றத்தை எடுத்துக்கொள். இங்கு, $u=x;\ v=-y$ ஆகும். w-தளத்தில் உள்ள வளைவரை z-தளத்தில் உள்ள வளைவரையின் மெய்யச்சு பிம்பம் என்பதைக் கவனி. இது கோண அளவு மாறா உருமாற்றத்திற்கு எடுத்துக்காட்டாகும். ஆனால் இது கோணம் மாறா நிலையுறு மாற்றம் அல்ல என்பதை நோக்குக.



படம் 29

(iii) $w=az$ இதில் a ஆனது ஒரு மெய்யெண். இந்த உருமாற்றம் z-தளத்தில் உள்ள உருவத்தைப் பெரிதாக்கி (அல்லது சிறிதாக்கி)க் காட்டுகிறதெனலாம். $a>1$ ஆனால் பெரிதாகும்; $a<1$ ஆனால் சிறிதாகும் என்பது தெளிவு.

(iv) $w = e^{ia} . z$. இப்பொழுது $z = re^{i\theta}$ எனக்கொண்டு

$$w = e^{ia} . re^{i\theta} = re^{i(\theta+a)}$$

இதிலிருந்து, மட்டு மாறவில்லை என்பதும், வீச்சமானது a அளவு அதிகரித்திருக்கிறது என்பதும் தெளிவு. எனவே இவ்வுரு மாற்றத்தின் விளைவு ஆதியை ஒட்டி இடஞ்சுழியாக a கோண அளவான சுழற்சிதான்.

எடுத்துக்காட்டாக, $w=iz$ என்ற உருமாற்றத்தைக் கவனி. $i= e^{i\pi/2}$ ஆனதால் இதன் விளைவு $(\pi/2)$ கோண அளவு சுழற்சியாகும். இப்பொழுது, z-தளத்தில் $0<y<1$ என்ற முடிவிலி

துண்டத்தின் மாற்றம் என்ன? அது $\pi/2$ கோணம் சுழன்றிருக்க வேண்டும். எனவே w தளத்தில் $-1 < u < 0$ என்ற முடிவிலி துண்டமாக மாறவேண்டும். இதனையே வேறு விதமாகவும் காண லாம்.

$$w = iz = i(x+iy) = -y + ix$$

$$\therefore \quad u = -y; \quad v = x$$

$0<y<1$ என்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$\therefore \quad 0 < -u < 1; \quad \therefore \quad 0 > u > -1;$$

அதாவது $-1<u<0$ ஆக இருக்கவேண்டும். மேலும் x-க்கு எம்மதிப்பும் இருக்கலாம். ஆகையால், $v(=x)$-க்கு எம்மதிப்பும் இருக்கலாம். எனவே, $-1<u<0$ என்ற முடிவிலித் துண்டம் தான் பிம்பமாக இருக்கவேண்டும்.

(v) $w = Az + B$ ....A, B என்பன கலப்பெண் மாறிலிகள்

இது (i), (iii), (iv) சேர்ந்த உருமாற்றமாகும். $A = ae^{i\alpha}$ ஆகவும், $B = b_1 + ib_2$ ஆகவும் கொள்க. அப்படியானால் z என்ற புள்ளி α கோண அளவு சுழன்று, a மடங்கு பெரிதாகி, பின்னர் b_1 அலகுகள் மெய்யச்சு வழியிலும், b_2 அலகுகள் கற்பனை அச்சு வழியிலும் நகர்த்தப்பட்டிருக்கிறது என்பது தெளிவு. எடுத்துக் காட்டாக, z-தளத்தில் உள்ள $OABC$ என்ற செவ்வகம் $w = (\sqrt{2} + \sqrt{2}i)z + 2 + i$ என்ற உருமாற்றத்தால் பெறும் விளைவு களை 30-ஆம் படத்தில் காண்க.

இங்கு, $a=2$, $\alpha = \pi/4$, $b_1 = 2$, $b_2 = 1$.

(vi) இனி, $w = \dfrac{1}{z}$ என்ற உருமாற்றத்தை எடுத்துக்கொள் வோம். இது ஒரு ஒன்றுக்கொன்று உருமாற்றம் என்பது தெளிவு. இதற்கு விதிவிலக்கான புள்ளிகள் $z=0$, $w=0$ ஆகும். ஏன்?

$z = re^{i\theta}$ எனவும், $w = \rho e^{i\phi}$ எனவும் கொண்டு,

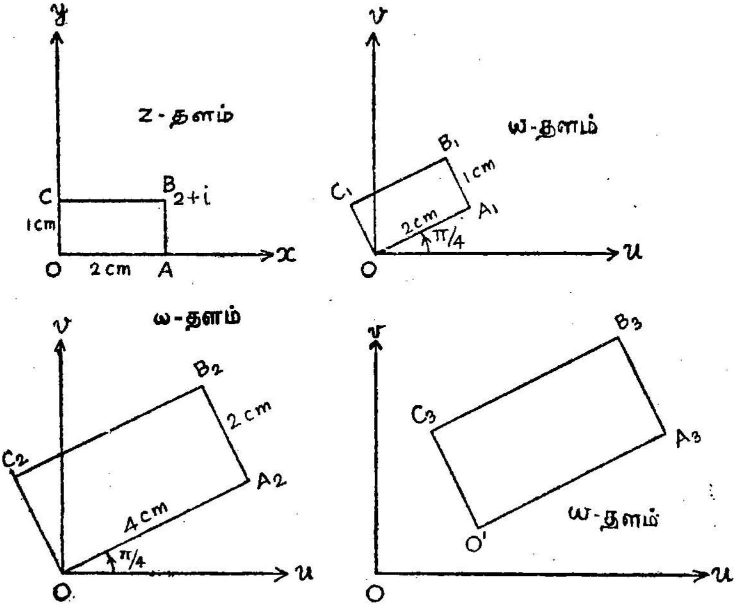
$$\rho e^{i\phi} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r} \cdot e^{-i\theta}$$

என இவ்வுரு மாற்றத்தை எழுதலாம். இதனை

$$z' = \frac{1}{r} e^{i\theta}; \; w = \overline{z'} \quad \left\{ = \frac{1}{r} e^{-i\theta} \right\}$$

என்ற அடுத்தடுத்த இரு உருமாற்றங்களாகக் கருதலாம்.

முதலாவதாக, $z' = \dfrac{1}{r} e^{i\theta}$ ஐக் கவனி.



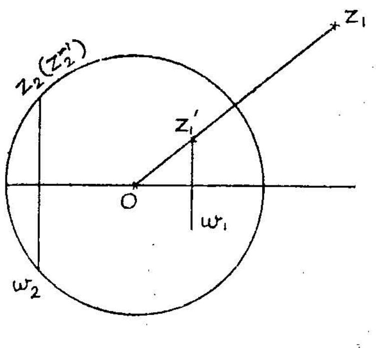
படம் 30

$$\text{வீச்சம் } (z) = \text{வீச்சம் } (z') = \theta$$

∴ z, z' ஐ இணைக்கும் கோடு ஆதிவழியே செல்லும்.

மேலும் $|z| \ |z'| = r \cdot \dfrac{1}{r} = 1$

4. ஆதியை மையமாகக்கொண்டு, அலகினை ஆரமாகவுடைய $|z| = 1$ என்ற வட்டத்திற்கு z, z' என்பவை தன்மாற்றுப் (inverse) புள்ளிகள் ஆகும். எனவே, வட்டத்திற்கு வெளியே உள்ள z_1 என்னும் புள்ளியின் தன்மாற்றுப் புள்ளியான z_1' வட்டத்தின் உட்புறத்தில் இருக்கவேண்டும். வட்டத்தில் மேல் உள்ள z_2 என்னும் புள்ளியின் தன்மாற்றுப் புள்ளியான z_2' ஆனது, z_2 லிருந்து மாறுபட்டதல்ல.



படம் 31

இனிமேல், $\overline{z'}$ ஆனது z'-ன் மெய்யச்சு பிம்பமாகும். ஆகவே, z_1'-ன் பிம்பமான w_1 வட்டத்தின் உட்புறமும், z_2'-ன் பிம்பமான w_2 வட்டத்தின் மேலும் இருக்கும்.

இதே விதமாக, வட்டத்தின் உள்ளே உள்ள புள்ளி இவ்விரு மாற்றங்களுக்குப்பின் வட்டத்திற்கு வெளியே இருக்கும் என்பது தெளிவு.

இப்பொழுது, $a(x^2+y^2)+2gx+2fy+c=0$ ... (1)

என்ற வட்டம், $w=1/z$ என்ற மாற்றத்தால் என்ன மாறுதலடைகிறது எனக் காண்போம்.

$$u+iv = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

$$\therefore \quad u = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad v = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

இதே விதமாக, $x = \dfrac{u}{u^2+v^2}$; $y = -\dfrac{v}{u^2+v^2}$ ... (T)

இம்மதிப்புகளை (1)-ல் பிரதியிட,

$$c(u^2+v^2)+2gu-2fv+a=0 \qquad \dots (2)$$

என்ற சமன்பாடு கிடைப்பதால், z-தளத்தில் உள்ள வட்டங்கள், w-தளத்தில் உள்ள வட்டங்களாக மாறுகின்றன.

இப்பொழுது, $c=0$ ஆனால், அதாவது, z-தளத்தின் வட்டங்கள் ஆதி வழியே சென்றால், (2)-வது சமன்பாட்டில் இருந்து அவை w-தளத்தில் நேர்கோடுகள் ஆகும் என அறிகிறோம். இதே விதமாக, $a=0$ ஆனால், அதாவது, z தளத்தில் உள்ள நேர் கோடுகள், w தளத்தில் ஆதிவழியே செல்லும் வட்டங்களாகும் என்பது தெளிவு.

$a=0$, $c=0$ ஆக இருப்பின், z தளத்தில் ஆதிவழி செல்லுங் கோடுகள், w தளத்திலும் ஆதிவழி செல்லுங் கோடுகளாகும் என்பது தெளிவு.

சிறப்பாக, $x=k$ என்ற கோட்டின் பிம்பத்தைக் காண்போம். (T)-யில் இருந்து, இப்பிம்பமானது

$$u^2+v^2-\frac{u}{k}=0 \quad \ldots \quad (3)$$ என்பது தெரிகிறது.

இவ்வட்டம் v அச்சை ஆதியில் தொடுகிறது. மேலும் $x>k$ என்பதன் பிம்பம் $\frac{u}{u^2+v^2}>k$ ஆகும். இதனையே

$$\left(u-\frac{1}{2k}\right)^2+v^2<\frac{1}{4k^2}$$ என எழுதலாம்.

$x>k$ என்றவாறுள்ள அரங்கத்தின் பிம்பம் (3)-ல் உள்ள வட்டத்தின் உட்புறமாகிறது. இதனை $k=1, 2,\ldots$ எனப் பிரதியிட்டுப் படங்கள் வரைந்து பார்.

6·5. மோபியஸ் உருமாற்றம்:

$$w=T(z)=\frac{az+b}{cz+d} \quad \ldots \quad (1)$$

என்பதில் $ad-bc\neq 0$ ஆகவும், a, b, c, d என்பன கலப்பெண் மாறிலிகளாகவும் இருந்தால் இதனை ஒருபடி பின்ன உருமாற்றம் என்போம். இதை மோபியஸ் என்பவர் பெருமளவில் ஆராய்ச்சி செய்ததால், மோபியஸ் உருமாற்றம் என்றும் பெயர் பெறும்.

இதில் $ad-bc=0$ ஆனுல், w-ஆனது மாறிலியாகும். அல்லது பொருளற்றதாகும். ஏனெனில்

$$w_2-w_1=\frac{az_2+b}{cz_2+d}-\frac{az_1+b}{cz_1+d}$$

$$=\frac{(ad-bc)(z_2-z_1)}{(cz_1+d)(cz_2+d)}$$

$\therefore \quad ad-bc=0$ ஆனுல் $w_1=w_2$.

இப்பொழுது, $$z=T^{-1}(w)=\frac{-dw+b}{cw-a} \quad \ldots \quad (2)$$

(1), (2)-லிருந்து மோபியஸ் மாற்றமானது ஒன்றுக்கொன்று உருமாற்றம் எனத் தெரிகிறது. ஆனுல், $c\neq 0$ ஆக இருக்கும் போது $z=-d/c$ ஆக இருந்தால் $w=\infty$ ஆகிறது. இதே விதமாக, $c\neq 0$, $w=a/c$ ஆனுல் $z=\infty$ ஆகும். ஆகவே, $z=\infty$, $w=\infty$ என்ற புள்ளிகளையும் சேர்த்து z, w-தளங்களை அடைத்த தளங்களாகக்

கருதினால் விதி விலக்கான புள்ளிகளை குறித்து கவலைப்பட வேண்டியதில்லை. மேலும்,

$$\frac{dw}{dz} = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$$

ஆனதால், $z=-d/c$ என்றால் $dw/dz=\infty$ என்பதையும் உற்று நோக்குக.

இனி உருமாற்றத்தை மாற்றம் என்றே சுருங்கக் கூறுவோம்.

6·6. தேற்றம்:

இரு மோபியஸ் மாற்றங்களின் விளைவு மற்றோர் மோபியஸ் மாற்றமாகும்.

$$z' = T_1(z) = \frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1}, \text{ இதில் } a_1d_1 \neq b_1c_1 \quad \ldots (1)$$

$$w = T_2(z') = \frac{a_2z'+b_2}{c_2z'+d_2}, \text{ இதில் } a_2d_2 \neq b_2c_2 \quad \ldots (2)$$

இப்பொழுது, $T_2\{T_1(z)\} = T_2(z') = \dfrac{a_2z'+b_2}{c_2z'+d_2}$

$$= \frac{a_2\left\{\dfrac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1}\right\}+b_2}{c_2\left\{\dfrac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1}\right\}+d_2}$$

$$w = \frac{(a_1a_2+b_2c_1)z+b_2d_1+a_2b_1}{(c_2a_1+d_2c_1)z+c_2b_1+d_2d_1}$$

$$w = \frac{Az+B}{Cz+D} \quad \ldots (3) \text{ என்போம்.}$$

இதில் $A = a_1a_2+b_2c_1$; $B = b_2d_1+a_2b_1$

$C = c_2a_1+d_2c_1$; $D = c_2b_1+d_2d_1$

மேலும், $AD-BC = (a_1d_1-b_1c_1)(a_2d_2-b_2c_2) \neq 0$.
ஆகவே, (3) ஒரு மோபியஸ் மாற்றம் என்பது தெளிவு.

6·7 (i). மோபியஸ் மாற்றங்களின் குலம்:

$w=T_0(z) = z$-ஐ மாற்றாத (identity) உறுப்பாகக் கொள்ளலாம். ஏனெனில்,

$T_0T = TT_0 = T$ என்பது தெளிவு.

மேலும், $(T_1 T_2) T_3 = T_1 (T_2 T_3)$ என்னும் தொடர்விதியை நேரிடையாகப் பிரதியிட்டுத் தெரிந்து கொள்ளலாம். எனவே, மோபியஸ் மாற்றங்கள் ஒரு குலத்தை (group) நிர்ணயிக்கின்றன என்று அறிகிறோம். இதை ஒரு குறிப்பாகக் கொள்ள வேண்டுமே தவிர முழு நிருபணமாகக் கொள்ளல் கூடாது.

6·7 (ii). தேற்றம்:

ஒரு மோபியஸ் மாற்றமானது, சில எளிய உருமாற்றங்களின் விளைவேயாகும்.

$$w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cz+d)}$$

$$= \frac{a}{c} + \frac{(bc-ad)}{c^2\left(z+\frac{d}{c}\right)} = A + \frac{B}{z+C}$$

இதில் $A = \frac{a}{c}$; $B = \frac{bc-ad}{c^2}$; $C = \frac{d}{c}$

இப்பொழுது, $z' = T_1(z) = z+C$ ... (1)

$$z'' = T_2(z') = \frac{1}{z'} \quad \text{... (2)}$$

$$w = T_3(z'') = A+Bz'' \quad \text{... (3)}$$

$$= A+\frac{B}{z'} = A+\frac{B}{z+C}$$

$$= \frac{az+b}{cz+d}.$$

6·8. இதிலிருந்து, ஒரு மோபியஸ் மாற்றமானது வட்டங்களையும், கோடுகளையும் வட்டங்களாக அல்லது கோடுகளாக மாற்றுகிறது எனலாம்.

ஏனெனில், $T_1(z) = z+C$ ... (1)

என்பது வெறும் இடப்பெயர்ச்சிதான். $T_2(z) = 1/z$... (2) ஆனது வட்டங்களையும், கோடுகளையும் வட்டங்களாக, அல்லது கோடுகளாக மாற்றுகிறது என 6·4 (vi)-ல் பார்த்தோம். பின்னர் $T_3(z) = A+Bz$...(3) என இருப்பதால் சுழற்சியும், உருவப் பெருக்கமும், இடப்பெயர்ச்சியும்தான் உண்டாகும்

என்பதை 6·4 (v)-ல் பார்த்தோம். இத்தேற்றத்தை நேரிடையாகவும் நிரூபிப்போம். z-தளத்தில்

$$A z \bar{z} + B z + \bar{B} \bar{z} + c = 0 \qquad \dots (1)$$

என்பது ஒரு வட்டம் அல்லது நேர் கோடாகும். இதில் A-யும், C-யும் மெய்மாறிலிகளாகும். இப்பொழுது

$$w = \frac{az+b}{cz+d} \quad \therefore \quad z = \frac{-dw+b}{cw-a}$$

இதை (1)-ல் பிரதியிட

$$A \left(\frac{-dw+b}{cw-a}\right) \left(\frac{-\bar{d}\bar{w}+\bar{b}}{\bar{c}\bar{w}-\bar{a}}\right)$$

$$+ B\left(\frac{-dw+b}{cw-a}\right) + \bar{B}\left(\frac{-\bar{d}\bar{w}+\bar{b}}{\bar{c}\bar{w}-\bar{a}}\right) + C = 0$$

$$\text{i.e. } A(d\bar{d}w\bar{w} - b\bar{b} - b\bar{d}\bar{w} - \bar{b}dw)$$

$$+ B(-d\bar{c}w\bar{w} + \bar{a}dw + b\bar{c}\bar{w} - b\bar{a})$$

$$+ \bar{B}(-c\bar{d}w\bar{w} + c\bar{b}w + a\bar{d}\bar{w} - a\bar{b})$$

$$+ C(c\bar{c}w\bar{w} - c\bar{a}w - a\bar{c}\bar{w} + a\bar{a}) = 0$$

$$\text{i.e. } A' w\bar{w} + B' w + \bar{B}' \bar{w} + C' = 0 \qquad \dots (2)$$

எனக் கிடைக்கும். இதில்

$$A' = A d\bar{d} + C c\bar{c} - B d\bar{c} - \bar{B}\bar{d}c$$

$$C' = -A b\bar{b} + C a\bar{a} - B b\bar{a} - \bar{B}\bar{b}a$$

என்பவை மெய்மாறிலிகள். (இதை நிரூபி). மேலும், w, $\bar{w}$-ன் கெழுக்களைக் கண்டுபிடித்து அவை B', $\bar{B}'$ என்றவாறு இருக்க வேண்டும் என்பதைத் தெரிந்துகொள். பின்னரும்,

$AC < B\bar{B}$ (ஏன்?) என்பதை உபயோகித்து $A'C' < B'\bar{B}'$ என நிரூபி.

இதிலிருந்து (2)-வது சமன்பாடு w- தளத்தில் ஒரு வட்டம் அல்லது கோட்டைக் குறிக்க வேண்டும் என்பது தெளிவு. (முதல் அத்தியாயத்தில் 4-வது மாதிரியைப் பார்.)

6·9. ஒரு வட்டத்தின் தன் மாற்றுப் புள்ளிகள் அல்லது நேர்மாறான புள்ளிகள்

O $(=a)$-ஐ மையமாகவும், r-ஐ ஆரமாகவும் உடைய வட்டத்தில் P $(=z)$; P' $(=z')$ என்பன நேர்மாறான புள்ளிகளாக இருக்கட்டும். $\therefore$ OPP' ஒரு நேர் கோடாகவும், $OP \cdot OP'=r^2$ ஆகவும் இருக்க வேண்டும்.

$\therefore$ வீச்சம் $(z-a)$ = வீச்சம் $(z'-a)$ ... (1)

$|z-a|\ |z'-a| = r^2$ ... (2)

(1)-ல் இருந்து, வீச்சம் $(z'-a)$ − வீச்சம் $(z-a) = 0$

$\therefore$ வீச்சம் $(z'-a)$ + வீச்சம் $(\bar{z}-\bar{a}) = 0$

$\therefore$ வீச்சம் $(z'-a)\ (\bar{z}-\bar{a}) = 0$

$\therefore$ $(z'-a)\ (\bar{z}-\bar{a})$ ஒரு மெய்யெண் ... (3)

இனி (2)-ஐ $|\bar{z}-\bar{a}|\ |z'-a| = r^2$... (4)

என எழுதலாம். $\therefore$ (3), (4) என்பவைகளிலிருந்து

$(z'-a)\ (\bar{z}-\bar{a}) = r^2$... (5)

இப்பொழுது, A, C மெய்யெண்களானால், ஒரு வட்டத்தை

$Az\bar{z} + Bz+\bar{B}\bar{z}+ C=0$... I என எழுதுவோம்.

$$\text{i.e. } \left(z+\frac{\bar{B}}{A}\right)\left(\bar{z}+\frac{B}{A}\right) = \frac{B\bar{B}-AC}{A^2}$$

இதன் மையம் $-\dfrac{\bar{B}}{A}$, (ஆரம்)$^2 = \dfrac{B\bar{B}-AC}{A^2}$

$\therefore$ (5)வது சமன்பாட்டை

$$\left(z'+\frac{\bar{B}}{A}\right)\left(\bar{z}+\frac{B}{A}\right) = \frac{B\bar{B}-AC}{A^2}$$

i.e. $Az'\bar{z} + Bz' + \bar{B}\bar{z} + C=0$... (6)

என எழுதலாம். இது, வட்டத்தின் சமன்பாட்டான I-ல் z-க்குப் பதிலாக z' போட்டால் கிடைக்கும் என்பதை நோக்குக. எனவே, z-யின் நேர்மாறான புள்ளியான z'-ஐ

$$z' = -\frac{\bar{B}\bar{z}+C}{A\bar{z}+B} \quad \dots (8)$$

என்ற சூத்திரத்தின் மூலம் கண்டுபிடிக்கலாம்.

6·10. $\left|\dfrac{z-\alpha}{z-\beta}\right| = k$ என்பது α, β-ஐத் தன் மாற்றுப்புள்ளி களாகக் கொண்ட வட்டம் என நிரூபி.

நிரூபணம். $|z-\alpha|^2 = k^2\,|z-\beta|^2$

$$(z-\alpha)(\bar{z}-\bar{\alpha}) = k^2(z-\beta)(\bar{z}-\bar{\beta})$$

i.e. $(z\bar{z}-\alpha\bar{z}-\bar{\alpha}z+\alpha\bar{\alpha}) = k^2(z\bar{z}-\beta\bar{z}-\bar{\beta}z+\beta\bar{\beta})$

i.e. $(1-k^2)z\bar{z}+(\bar{\beta}k^2-\bar{\alpha})z+(\beta k^2-\alpha)\bar{z}+\alpha\bar{\alpha}-\beta\bar{\beta}k^2=0$

இதன் மையம் $z_0 = -\dfrac{(\beta k^2-\alpha)}{1-k^2} = \dfrac{\alpha-\beta k^2}{1-k^2}$

இதன் ஆரம் ρ ஆனால், $\rho^2 = (\bar{B}B-AC)/A^2$

$$\therefore\quad \rho^2 = \frac{(\beta k^2-\alpha)(\bar{\beta}k^2-\bar{\alpha})-(1-k^2)(\alpha\bar{\alpha}-\beta\bar{\beta}k^2)}{(1-k^2)^2}$$

$$\therefore\quad (1-k^2)^2\rho^2 = \beta\bar{\beta}k^4-\bar{\alpha}\beta k^2-\alpha\bar{\beta}k^2+\alpha\bar{\alpha}$$

$$-\alpha\bar{\alpha}+\beta\bar{\beta}k^2+k^2\alpha\bar{\alpha}-k^4\beta\bar{\beta}$$

$$= k^2(\alpha-\beta)(\bar{\alpha}-\bar{\beta})$$

$$= k^2|\alpha-\beta|^2$$

$$\therefore\quad \rho = \frac{k|\alpha-\beta|}{1-k^2}$$

இனி, 6·9-ல் உள்ள (8)வது சமன்பாட்டின்படி

$$\beta = -\frac{B\bar{\alpha}+C}{A\bar{\alpha}+B}$$ என நிரூபித்தால் போதும்.

அதாவது $\beta = -\dfrac{(\beta k^2-\alpha)\bar{\alpha}+\alpha\bar{\alpha}-\beta\bar{\beta}k^2}{(1-k^2)\bar{\alpha}+\bar{\beta}k^2-\bar{\alpha}}$

என நிரூபித்தால் போதும். இதன் நிரூபணம் பயிற்சியாக விடப் பட்டுள்ளது.

6·11. $P(=\alpha)$, $Q(=\beta)$ என்பவை ஒரு வட்டத்தின் நேர்மாறுன புள்ளிகளானல், அவ்வட்டத்தின் சமன்பாட்டை

$\left|\dfrac{z-\alpha}{z-\beta}\right| = k,\ k\neq 1$ என எழுதலாம்.

நிரூபணம்:

அந்த வட்டத்தின் மையம் z_0 ஆகவும், ஆரம் r ஆகவும் இருந்தால் வட்டத்தின் சமன்பாடு $|z-z_0| = r$ ஆகும்.

ஆகவே, அதில் உள்ள $P\ (=z)$ என்னும் புள்ளியை $z=z_0+re^{i\theta}$ எனக் குறிப்பிடலாம்.

இப்பொழுது, P, Q நேர்மாறான புள்ளிகள்.

$\therefore$ OPQ ஒரு நேர்கோடு; $OP.\ OQ=r^2$

$\therefore$ $OQ=q$ ஆனால், $OP = \dfrac{r^2}{q}$

மேலும் $\alpha-z_0 = \dfrac{r^2}{q}\cdot e^{i\lambda}$ ஆகவும்

$\beta-z_0 = q\, e^{i\lambda}$ ஆகவும் இருக்க வேண்டும்.

எனவே, $$\left|\frac{z-\alpha}{z-\beta}\right| = \left|\frac{z_0+re^{i\theta}-z_0-\dfrac{r^2}{q}\cdot e^{i\lambda}}{z_0+re^{i\theta}-z_0-qe^{i\lambda}}\right|$$

$$= \frac{r}{q}\cdot\left|\frac{qe^{i\theta}-re^{i\lambda}}{re^{i\theta}-qe^{i\lambda}}\right|$$

$$= \frac{r}{q}\left[\frac{(q\cos\theta-r\cos\lambda)^2+(q\sin\theta-r\sin\lambda)^2}{(r\cos\theta-q\cos\lambda)^2+(r\sin\theta-q\sin\lambda)^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{r}{q}$$

$$= k \neq 1.$$

6·12. ஒரு மோபியஸ் மாற்றத்தினால், ஒரு வட்டமும் அதன் இரு நேர்மாறான புள்ளிகளும், மற்றோர் வட்டமும், அதனுடைய இரு நேர்மாறான புள்ளிகளுமாக மாறும். வட்டமானது நேர் கோடாக மாறும்போது, நேர்மாறான புள்ளிகளின் பிம்பங்கள் கோட்டிலிருந்து சமதூரத்தில் இருக்கும்.

நிரூபணம்:

கொடுக்கப்பட்ட வட்டத்தின் நேர்மாறான புள்ளிகள் α, β ஆனால் அதன் சமன்பாட்டை 6·11 படி

$\left|\dfrac{z-\alpha}{z-\beta}\right| = k,\ k \neq 1$ என எழுதலாம்.

இப்பொழுது $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ $\therefore$ $z = \dfrac{-dw+b}{cw-a}$

$$\therefore \left|\frac{\dfrac{-dw+b}{cw-a}-\alpha}{\dfrac{-dw+b}{cw-a}-\beta}\right| = k$$

$$\therefore \left|\frac{-dw+b-cw\,\alpha+a\,\alpha}{-dw+b-cw\,\beta+a\,\beta}\right| = k$$

$$\therefore \left|\frac{w\,(c\,\alpha+d)-(a\,\alpha+b)}{w\,(c\,\beta+d)-(a\,\beta+b)}\right| = k$$

$$\therefore \left|\frac{w-\alpha'}{w-\beta'}\right| = k.\left|\frac{c\beta+d}{c\alpha+d}\right|$$

$$= k' \neq 1$$

இதில் $\alpha' = \dfrac{a\,\alpha+b}{c\,\alpha+d}$; $\beta' = \dfrac{a\beta+b}{c\beta+d}$ என அறிக.

அதாவது α', β' என்பவை α, β என்பவற்றின் மோபியஸ் மாற்றத்தாலான பிம்பங்கள்.

6·10 படி, $\left|\dfrac{z-\alpha'}{z-\beta'}\right| = k'$ ஆனது ஒரு வட்டத்தையும், அதன் இரு நேர்மாறான புள்ளிகளையும் குறிக்கும் என்பது தெளிவு.

$k' = 1$ ஆனால் $\left|\dfrac{z-\alpha'}{z-\beta'}\right| = 1$ என்பது α', β'-ன் மையக் குத்துக் கோட்டைக் குறிக்கும். ஆகையால் α', β' அக்கோட்டினின்று சமதூரத்தில் இருக்கும்.

6·13. குறுக்குத் தகவு!

z_1, z_2, z_3, z_4 என்ற 4 வெவ்வேறு புள்ளிகளின் குறுக்குத் தகவை

$$\frac{(z_1-z_4)(z_3-z_2)}{(z_1-z_2)(z_3-z_4)}$$

என வரையறை செய்வோம்.

தேற்றம்: மோபியஸ் மாற்றத்தால் குறுக்குத் தகவு மாறுது.

$$\frac{(w_1-w_4)(w_3-w_2)}{(w_1-w_2)(w_3-w_4)} = \frac{(z_1-z_4)(z_3-z_2)}{(z_1-z_2)(z_3-z_4)}$$

என நிருபிக்க வேண்டும். இப்பொழுது,

$$w_1-w_2 = \frac{az_1+b}{cz_1+d} - \frac{az_2+b}{cz_2+d}$$

$$= \frac{(ad-bc)(z_1-z_2)}{(cz_1+d)(cz_2+d)}$$

இதே விதமாக, $(w_3-w_4) = \dfrac{(ad-bc)(z_3-z_4)}{(cz_3+d)(cz_4+d)}$

$$(w_1-w_4) = \frac{(ad-bc)(z_1-z_4)}{(cz_1+d)(cz_4+d)}$$

$$(w_3-w_2) = \frac{(ad-bc)(z_3-z_2)}{(cz_3+d)(cz_2+d)}$$

$$\therefore \quad \frac{(w_1-w_4)(w_3-w_2)}{(w_1-w_2)(w_3-w_4)} = \frac{(z_1-z_4)(z_3-z_2)}{(z_1-z_2)(z_3-z_4)}$$

குறிப்பு: இதில் z_1-உம் w_2-உம் ∞ ஆனல் என்னுகும்?

$$\frac{(w_1-w_4)\{(w_3/w_2)-1\}}{\{(w_1/w_2)-1\}(w_3-w_4)} = \frac{\{1-(z_4/z_1)\}(z_3-z_2)}{\{1-(z_2/z_1)\}(z_3-z_4)}$$

$$\therefore \quad \frac{w_1-w_4}{w_3-w_4} = \frac{z_3-z_2}{z_3-z_4}$$

6·14. (i) பொதுவாக, மோபியஸ் மாற்றத்திஞல் நிலை மாறுத (invariant) புள்ளிகள் இரண்டு உண்டு. இவை α, β ஆனல்,

$$\frac{w-\alpha}{w-\beta} = k\ \frac{(z-\alpha)}{(z-\beta)}$$

என்ற வடிவில் மோபியஸ் மாற்றத்தை எழுதலாம்.

(ii) இதில் θ என்பது k-ன் வீச்சம் ஆனால், α, β ஐ இணைக்கும் கோட்டை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் பிம்பத்தின் ஆரம் $\left|\dfrac{\alpha-\beta}{2\cos\theta}\right|$ என நிரூபி.

(iii) ஆனால், $(a-d)^2+4\,bc=0$ ஆக இருந்தால் ஒரே நிலை மாறாத புள்ளி, α, தான் கிடைக்கும் என்றும், மோபியஸ் மாற்றத்தை

$$\frac{1}{w-\alpha} = \frac{1}{z-\alpha} + k$$

என்ற வடிவில் எழுதலாம் எனவும் நிரூபி.

(iv) எல்லாப் புள்ளிகளும் நிலை மாறாப்புள்ளிகளாக நிபந்தனை என்ன?

(i) $w = (az+b)\,/\,(cz+d)$

z நிலை மாறவில்லை. $\therefore\ w = z.$

$\therefore\ z\,(cz+d) = az+b$

ie. $cz^2 - (a-d)\,z - b = 0$ ... (1)

பொதுவாக, இதற்கு 2 மூலங்கள் α, β உண்டு.

$\therefore\ c\alpha^2 - (a-d)\,\alpha - b = 0$

$$\left.\begin{aligned} \therefore\ c\alpha^2 - a\alpha &= b - d\,\alpha. \\ \text{இதேவிதமாக, } c\beta^2 - a\beta &= b - d\,\beta \end{aligned}\right\} \quad \text{... (2)}$$

$$\text{இப்பொழுது, } \frac{w-\alpha}{w-\beta} = \frac{\dfrac{az+b}{cz+d}-\alpha}{\dfrac{az+b}{cz+d}-\beta}$$

$$= \frac{az+b-c\alpha z-d\alpha}{az+b-c\beta z-d\beta}$$

$$= \frac{(a-c\alpha)\,z+c\alpha^2-a\alpha}{(a-c\beta)\,z+c\beta^2-a\beta} \quad \text{...(2)-ல் இருந்து}$$

$$= \frac{(a-c\alpha)\,(z-\alpha)}{(a-c\beta)\,(z-\beta)}$$

$$\therefore \frac{w-\alpha}{w-\beta} = k\frac{(z-\alpha)}{(z-\beta)} \quad \ldots \quad \text{இதில் } k = \frac{a-c\alpha}{a-c\beta} \quad \ldots \quad (3)$$

(ii) $A\,(=\alpha)$, $B\,(=\beta)$, $P\,(=z)$ ஆக இருக்கட்டும். AB ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தில் P இருந்தால் $AP \perp PB$.

$$\therefore \text{வீச்சம்} \left(\frac{z-\alpha}{z-\beta}\right) = \pm \frac{\pi}{2}$$

$\therefore \dfrac{z-\alpha}{z-\beta}$ முழுவதுமாக ஒரு கற்பனை எண்.

$$\therefore \frac{z-\alpha}{z-\beta} + \frac{\bar{z}-\bar{\alpha}}{\bar{z}-\bar{\beta}} = 0$$

ஆனால் $\dfrac{w-\alpha}{w-\beta} = \dfrac{k\,(z-\alpha)}{(z-\beta)}$ ... (3)-ல் இருந்து

$$\therefore \frac{1}{k}\;\frac{w-\alpha}{w-\beta} + \frac{1}{\bar{k}}\;\frac{\bar{w}-\bar{\alpha}}{\bar{w}-\bar{\beta}} = 0$$

$k = |k|\,e^{i\theta}$ ஆனால், $\bar{k} = |k|\,e^{-i\theta}$ எனவே

$$e^{-i\theta}(w-\alpha)(\bar{w}-\bar{\beta}) + e^{i\theta}(\bar{w}-\bar{\alpha})(w-\beta) = 0$$

i.e. $\quad \bar{w}w\,(e^{-i\theta} + e^{i\theta}) - w\,(\bar{\alpha}\,e^{i\theta} + \bar{\beta}\,e^{-i\theta})$

$$-\bar{w}(\alpha\,e^{-i\theta} + \beta e^{i\theta}) + \alpha\bar{\beta}\,e^{-i\theta} + \bar{\alpha}\,\beta\,e^{i\theta} = 0$$

இதன் ஆரம் $= \sqrt{\dfrac{B\bar{B}-A\bar{C}}{A^2}} = \left|\dfrac{\alpha-\beta}{2\cos\theta}\right|$

என்பதன் நிருபணம் பயிற்சிக்கென விடப்பட்டுளது.

(iii) சமன்பாடு (1)-ல் இருந்து, $(a-d)^2 + 4\,bc = 0$

ஆனல் ஒரே மூலம் α தான் கிடைக்கும் என்பது தெளிவு.

மேலும், $\alpha = \dfrac{a-d}{2c}$

$$\therefore \quad d = a - 2\,c\,\alpha \quad \ldots \quad (4)$$

இப்பொழுது, $\frac{1}{w-\alpha} = \frac{1}{\frac{az+b}{cz+d} - \alpha}$

$$= \frac{cz+d}{az+b-c\alpha z-d\alpha}$$

$$= \frac{cz+a-2c\alpha}{(a-c\alpha)z+b-d\alpha} \quad \ldots \text{(4)-ல் இருந்து}$$

$$= \frac{(cz-c\alpha)+a-c\alpha}{(a-c\alpha)z+c\alpha^2-a\alpha} \quad \ldots \text{(2)-ல் இருந்து}$$

$$= \frac{c(z-\alpha)+(a-c\alpha)}{(a-c\alpha)(z-\alpha)}$$

$$= \frac{1}{z-\alpha} + k \ldots \text{இதில் } k = \frac{c}{a-c\alpha}$$

(iv) $w=z$ என்ற மாற்றம் தான்!

இதனையே சமன்பாடு (1)-ல் இருந்து $c=0$; $a=d$; $b=0$ என்று சொல்லலாம்.

மாதிரிக் கணக்குகள்

மாதிரி 1: z-தளத்திலுள்ள (i) $I(z) \geq 0$ என்ற அரங்கத்தை [(ii) $R(z) \geq 0$ என்ற அரங்கத்தை], $|w| \leq 1$ என்ற அரங்கமாக மாற்றும் எல்லா மோபியஸ் மாற்றங்களையும் கண்டுபிடி.

(i) $|w|=1$ என்ற வட்டத்தின் பிம்பம் z-தளத்தின் மெய்யச்சாகும். இந்த வட்டத்தின் தன் மாற்றுப் புள்ளிகள் w, $\frac{1}{\bar{w}}$ ஆகும். எனவே இவற்றின் பிம்பங்கள் மெய்யச்சுக்குச் சமதூரத்தில் உள்ள புள்ளிகளான z, $\bar{z}$ ஆகும். சிறப்பாக, $w=0$, $w=\infty$ என்பவை $|w|=1$ என்ற வட்டத்தின் தன் மாற்றுப் புள்ளிகள் ஆகும்,

இப்பொழுது, $w=(az+b)/(cz+d)$

$\therefore$ $w=0$ ஆனுல் $z=-b/a$; $w=\infty$-ஆனுல் $z=-d/c$.

$\therefore$ $\alpha=(-b/a)$ ஆனுல் $\bar{\alpha}=(-d/c)$

ஆக இருக்க வேண்டும்.

$$\therefore \quad w = \frac{a}{c}\,\frac{[z+(b/a)]}{[z+(d/c)]} = \frac{a}{c}\,\frac{(z-\alpha)}{(z-\bar{\alpha})}$$

மேலும், $1=|w|=\left|\dfrac{a}{c}\right|\left|\dfrac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}}\right|$

இதில் $z=0$ என இடு.

$$1=\left|\frac{a}{c}\right|\left|\frac{\alpha}{\bar{\alpha}}\right|=\left|\frac{a}{c}\right|$$

$$\therefore\quad |a|=|c|,\quad \therefore\quad a=ce^{i\lambda}$$

$$\therefore\quad w=e^{i\lambda}\cdot\frac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}}.$$

இதில் $I(\alpha)>0$ ஆக இருக்கவேண்டும். ஏன்?

(ii)-ன் நிரூபணத்திற்குக் குறிப்புகள் மட்டும் தருவோம். இப்போது $|w|=1$ என்ற வட்டத்தின் பிம்பம் y-அச்சு. $\therefore$ w, $\dfrac{1}{\bar{w}}$ -ன் பிம்பங்கள் $z, -\bar{z}$ ஆகும். முன் மாதிரி, $\alpha=(-b/a)$ ஆனல் $-\bar{\alpha}=(-d/c)$ ஆகும். (இவை, 0, ∞-ன் பிம்பங்கள்)

$$\therefore w=\frac{a}{c}\;\frac{z-\alpha}{z+\bar{\alpha}}.$$

$$1=|w|=\left|\frac{a}{c}\right|\left|\frac{-\alpha}{\bar{\alpha}}\right|=\left|\frac{a}{c}\right|$$

$$\therefore\quad a=c\,e^{i\lambda}.$$

$$\therefore\quad w=e^{i\lambda}\,\frac{z-\alpha}{z+\bar{\alpha}}.$$

மாதிரி 2: $|w|=1$ என்ற வட்டத்தை, z-தளத்தில் நேர் கோடாக மாற்றும் மோபியஸ் மாற்றம் எது?

z-தளத்தில் உள்ளகோடு $\left|\dfrac{z-\alpha}{z-\beta}\right|=1$ ... (1)

இதில் $\alpha=-b/a;\ \beta=-d/c$ என்று போடு

$$\left|\frac{z+(b/a)}{z+(d/c)}\right|=1$$

$\therefore\quad |w|=\left|\dfrac{a}{c}\right|$, ஏனெனில், $w=\dfrac{a\{z+(b/a)\}}{c\{z+(d/c)\}}$

$\therefore\quad |a|=|c|$ ஆனல், இது $|w|=1$ ஆகும்.

மாதிரி 3: $|z| \leq r$ என்ற வட்டத்தை $|w| \leq \rho$ என்ற வட்டமாக்கும் மோபியஸ் மாற்றம் எது?

$$w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a[z+(b/a)]}{c[z+(d/c)]}$$

0வும், ∞யும் $|w| = \rho$-ன் தன் மாற்றுப்புள்ளிகள். ∴ z-தளத்தில் $(-b/a)$; $(-d/c)$-தன் மாற்றுப் புள்ளிகளாக இருக்கவேண்டும். $|z| = r$ என்பதின் தன் மாற்றுப்புள்ளிகள்

$z, \frac{r^2}{\bar{z}}$ என அறிவோம்.

$$\therefore \quad \alpha = -b/a \text{ ஆனால் } r^2/\bar{\alpha} = -d/c \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore \quad w = \frac{a}{c} \frac{(z-\alpha)}{(z-r^2/\bar{\alpha})} = \frac{a\bar{\alpha}}{c} \frac{(z-\alpha)}{(\bar{\alpha}z-r^2)} \quad \dots (1)$$

$$\text{மேலும், } \rho = |w| = \left| \frac{a\bar{\alpha}}{c} \frac{(z-\alpha)}{(\bar{\alpha}z-r^2)} \right|$$

$$= \left| \frac{a\bar{\alpha}}{c} \right| \frac{|z-\alpha|}{|z|\,|\bar{\alpha}-\bar{z}|}, \quad \because z\bar{z} = r^2$$

$$= \frac{1}{r} \left| \frac{a\bar{\alpha}}{c} \right| \quad \dots \because |z-\alpha| = |\bar{\alpha}-\bar{z}|$$

$$\therefore \quad \frac{a\bar{\alpha}}{c} = r\rho e^{i\lambda}$$

$$\therefore \quad w = r\rho e^{i\lambda} \frac{(z-\alpha)}{(\bar{\alpha}z-r^2)} \quad \dots (1)\text{-ல் இருந்து.}$$

இனி $|z| = r$-ன் உட்புறம், $|w| = \rho$-ன் உட்புறத்திற்கு இசைவாக உள்ளதா, அன்றி வெளிப்புறத்திற்கு இசைவாக உள்ளதா என ஆராய்வோம்.

$$w\bar{w} - \rho^2 = \frac{r\rho e^{i\lambda}(z-\alpha)}{(\bar{\alpha}z-r^2)} \cdot \frac{r\rho e^{-i\lambda}(\bar{z}-\bar{\alpha})}{(\alpha\bar{z}-r^2)} - \rho^2$$

$$= \frac{\rho^2[r^2(z-\alpha)(\bar{z}-\bar{\alpha})-(\bar{\alpha}z-r^2)(\alpha\bar{z}-r^2)]}{|\bar{\alpha}z-r^2|^2}$$

$$= \frac{\rho^2[r^2(z\bar{z}+\alpha\bar{\alpha}-\alpha\bar{z}-\bar{\alpha}z)-(\alpha\bar{\alpha}z\bar{z}+r^4-r^2\alpha\bar{z}-r^2\bar{\alpha}z)]}{|\bar{\alpha}z-r^2|^2}$$

$$= \frac{\rho^2 [z\bar{z} (r^2 - \alpha\bar{\alpha}) + r^2 (\alpha\bar{\alpha} - r^2)]}{|\bar{\alpha} z - r^2|^2}$$

$$\therefore \quad |w|^2 - \rho^2 = \frac{\rho^2 (r^2 - \alpha\bar{\alpha}) (z\bar{z} - r^2)}{|\bar{\alpha} z - r^2|^2}$$

$$= \frac{\rho^2 (r^2 - |\alpha|^2) (|z|^2 - r^2)}{|\bar{\alpha} z - r^2|^2}$$

இப்பொழுது $|\alpha| < r$ எனக் கொள்க.

அப்படியானால் $|z| < r$-உம், $|w| < \rho$-உம் இசையானவையாகும்.

$|\alpha| > r$ ஆனால், $|z| < r$-உம், $|w| > \rho$-உம் இசையானவையாகும்.

மாதிரி: 4. $z = c$ என்ற புள்ளியை ஆதியாகவும் $|z - a| \leq R$ என்ற வட்டத்தை $|w| \leq 1$ என்ற வட்டமாகவும் மாற்றும் மோபியஸ் மாற்றம் எது?

$$w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} = \frac{\alpha}{\gamma} \frac{(z + \beta/\alpha)}{(z + \delta/\gamma)}$$

$0, \infty$ என்பவை w-தளத்தில் தன் மாற்றுப் புள்ளிகள். $\therefore \; -\beta/\alpha, -\delta/\gamma$ z-தளத்தில் தன் மாற்றுப்புள்ளிகள். மேலும், $w = 0$ என்பது $z = c$-ன் பிம்பம். இப்பொழுது, $|z - a| = R$-ல், $z = c$-ன் தன்மாற்றுப் புள்ளியயான c'-ஐக் கண்டுபிடிப்போம்.

$$(c' - a)(\bar{c} - \bar{a}) = R^2. \qquad \text{6·9-ல் (5) ஐப்பார்}$$

$$\therefore \quad c' = a + \frac{R^2}{\bar{c} - \bar{a}}$$

$c = -\beta/\alpha$ என்றும், $c' = -\delta/\gamma$ என்றும் போடு.

$$1 = |w| = \left|\frac{\alpha}{\gamma}\right| \left| \frac{|z - c|}{z - a - \dfrac{R^2}{\bar{c} - \bar{a}}} \right|$$

$$= \left|\frac{\alpha}{\gamma}\right| \frac{|z - c| \; |\bar{c} - \bar{a}|}{|(z - a)(\bar{c} - \bar{a}) - (z - a)(\bar{z} - \bar{a})|}$$

$$= \left| \frac{\alpha}{\gamma} \right| \frac{|z-c|}{|z-a|} \frac{|\bar{c}-\bar{a}|}{|\bar{c}-\bar{z}|}$$

$$= \left| \frac{\alpha}{\gamma} \right| \frac{|\bar{c}-\bar{a}|}{R}$$, ஏனெனில் $|z-c| = |\bar{c}-\bar{z}|$

$\therefore \quad \frac{\alpha}{\gamma}(\bar{c}-\bar{a}) = R e^{i\lambda}$ எனலாம்.

$$\therefore \quad w = \frac{Re^{i\lambda}}{(z-a)(\bar{c}-\bar{a}) - R^2} = \frac{Re^{i(\pi+\lambda)}}{R^2-(z-a)(\bar{c}-\bar{a})}$$

மாதிரி 5: $z=0$, $z=\frac{1}{2}$ என்பவற்றை $w=1$, $w=0$ ஆகவும், $|z-1|=1$ என்ற வட்டத்தை $|w|=1$ ஆகவும் மாற்றும் மோபியஸ் மாற்றம் எது?

$w=(az+b)/(cz+d)$ எனக் கொள்க.

$\{0, 1\}$ $\{\frac{1}{2}, 0\}$ ஆகியவை இசைப் புள்ளிகள்.

$\therefore \quad 1=b/d\ ;\ 0=(a/2)+b.$ ... (1)

$z=\frac{1}{2}$-ன் தன் மாற்றுப் புள்ளியான z' எது?

$(z'-1)(\frac{1}{2}-1)=1^2$ ... 6·9-ல் (5) ஐப்பார்.

$\therefore \quad z'=-1.$

$w=0$-ன் தன் மாற்றுப் புள்ளி ∞ ஆகும். ஆனால் $\{\frac{1}{2}, 0\}$ இசைப்புள்ளிகள்.

$\therefore \quad \{-1, \infty\}$ இசைப்புள்ளிகள்.

$$\therefore \quad \infty = \frac{-a+b}{-c+d} \quad \therefore \quad d=c \qquad \dots (2)$$

(1), (2)-ல் இருந்து $w = \frac{-2bz-b}{bz+b} = \frac{1-2z}{1+z}$.

மாதிரி 6: $w=(13iz+75)/(3z-5i)$ என்பதை

$$\frac{w-\alpha}{w-\beta} = k\,\frac{(z-\alpha)}{(z-\beta)}$$ என்ற வடிவில் எழுதுக.

இப்போது $|z|=5$ என்ற வட்டமானது, w-தளத்தில் α, β-ஐ இணைக்கும் கோட்டை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டமாக மாறுகிறது என்றும்; முதல் வட்டத்தின் உட்புறம் அடுத்ததன் வெளிப்புறத்திற்கு இசைவாக இருக்கும் என்றும் நிரூபி.

இதில், $w = \dfrac{13iz+75}{3z-5i}$

$\therefore \quad a = 13i, \ b = 75, \ c = 3, \ d = -5i$

6·14. ஐப்பார்க்கவும். (1)-ல் இருந்து α, β என்பவை

$$cz^2 - (a-d)z - b = 3z^2 - 18iz - 75 = 0.$$

என்பதன் மூலங்கள் என்றும், 6·14 (3)-ல் இருந்து

$k = (a - c\alpha) / (a - c\beta)$ என்றும் அறிவோம்.

$\therefore \quad \alpha = 3i - 4 \ ; \ \beta = 3i + 4$

$$k = \frac{13i - 3(3i-4)}{13i - 3(3i+4)} = \frac{4i+12}{4i-12} = -\frac{(4+3i)}{5}$$

$\therefore \dfrac{w-\alpha}{w-\beta} = k \dfrac{z-\alpha}{z-\beta}$ என்பது வேண்டிய மாற்றமாகும்.

இங்கு $|z| = 5$ ஆகையால் $z = 5(\cos\theta + i\sin\theta)$ எனக் கொள்க. இப்போது,

$$\text{வீச்சம்}\left(\frac{w-\alpha}{w-\beta}\right) = \text{வீச்சம் } k + \text{வீச்சம்}\left(\frac{z-\alpha}{z-\beta}\right)$$

$$= \text{வீ}(k) + \text{வீ}(z-\alpha) - \text{வீ}(z-\beta)$$

$$= \text{வீ}\left(\frac{4+3i}{-5}\right) + \text{வீ}[5\cos\theta + 4 + i(5\sin\theta - 3)]$$

$$- \text{வீ}[5\cos\theta - 4 + i(5\sin\theta - 3)]$$

$$\therefore \quad \text{வீ}\left(\frac{w-\alpha}{w-\beta}\right) = \tan^{-1}\frac{3}{4} + \tan^{-1}\frac{5\sin\theta - 3}{5\cos\theta + 4}$$

$$-\tan^{-1}\frac{5\sin\theta - 3}{5\cos\theta - 4}$$

$$= \tan^{-1}\frac{3}{4} + \tan^{-1}\frac{4}{3} = \frac{\pi}{2}$$

$\therefore$ w ஆனது α, β-ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தில் இருக்க வேண்டும் என அறிகிறோம். கடைசியாக, $|z| = 5$ என்ற வட்டத்திற்கு வெளியே உள்ள புள்ளியை $z = re^{i\theta}$ என எடுத்துக் கொள். இங்கு $r > 5$. இப்போது,

வீச்சம் $\dfrac{z-\alpha}{z-\beta}$ = வீச்சம் $(z-\alpha)$ — வீச்சம் $(z-\beta)$

$= $ வீ $\{(r\cos\theta+4)+i(r\sin\theta-3)\}$
$\qquad -$வீ $\{(r\cos\theta-4)+i(r\sin\theta-3)$

$$= \tan^{-1}\frac{r\sin\theta-3}{r\cos\theta+4} - \tan^{-1}\frac{r\sin\theta-3}{r\cos\theta-4}$$

$$= \tan^{-1}\frac{-8(r\sin\theta-3)}{r^2-6r\sin\theta-7}$$

$$= \tan^{-1}\frac{8(3-r\sin\theta)}{r^2-6r\sin\theta-7}$$

$< \tan^{-1}\dfrac{8(3-r\sin\theta)}{18-6r\sin\theta}$, $\because$ இதில் $r>5$

$= \tan^{-1}(4/3)$

$\therefore$ வீச்சம் $\dfrac{w-\alpha}{w-\beta} < \pi/2$

$\therefore$ w-ஆனது வட்டத்தினுள்ளே இருக்க வேண்டும்.

மாதிரி 7: $w = \dfrac{5-4z}{4z-2}$ என்ற மாற்றம் $|z|=1$ என்ற வட்டத்தை w-தளத்தில் வட்டமாக மாற்றுகிறது என நிரூபி. அதன் மையத்தைக் கண்டுபிடி.

$w=(5-4z)/(4z-2)$ $\quad\therefore\quad z=(2w+5)/(4w+4)$.

$$\therefore\ z\bar{z} = \frac{2w+5}{4w+4}\cdot\frac{2\bar{w}+5}{4\bar{w}+4}$$

$$|z|^2 = \frac{4w\bar{w}+10(w+\bar{w})+25}{16(w\bar{w}+w+\bar{w}+1)}$$

$$1 = \frac{4(u^2+v^2)+20u+25}{16(u^2+v^2+2u+1)}$$

$$12(u^2+v^2)+12u-9=0$$

$$u^2+v^2+u-(3/4)=0.$$

$\therefore$ இது ஒரு வட்டம். இதன் மையம் $(-\frac{1}{2},0)$.

மாதிரி 8: $w = \dfrac{iz+2}{4z+i}$ என்ற மாற்றம் z-தளத்தின் மெய்யச்சை வட்டமாக மாற்றுகிறது எனநிரூபி. இதன் மையம், ஆரம் ஆகியவற்றைக் கண்டுபிடி. z-தளத்தில் உள்ள எந்தப் புள்ளி இதன் மையமாகிறது?

$$w = (iz+2) / (4z+i) \quad \therefore \quad z = (2-iw) / (4w-i)$$

$$\therefore \quad z = \frac{2-iw}{4w-i} \cdot \frac{4\bar{w}+i}{4\bar{w}+i} \text{ ... இதில் விகுதி மெய்யெண்}$$

$$x+iy = \frac{-4iw\bar{w} + w + 8\bar{w} + 2i}{16w\bar{w} + 4(w-\bar{w})i + 1}$$

$$y = 0 \text{ ஆனால்}, \quad -4w\bar{w} + v - 8v + 2 = 0.$$

$$\therefore \quad 4(u^2+v^2) + 7v - 2 = 0.$$

இது ஒரு வட்டம். இதன் மையம் $(0, -7/8)$; ஆரம் $9/8$.

$$z = \frac{2-iw}{4w-i} = \frac{2-i(-7i/8)}{4(-7i/8)-i}$$

$$= \frac{16-7}{-28i-8i} = \frac{i}{4}$$

$\therefore \quad z = \dfrac{i}{4}$ என்ற புள்ளி, w-தளத்தில் வட்டமையமாகிறது.

மாதிரி 9: $w=(az+b) / (cz+d)$ என்ற மாற்றத்தால் $\displaystyle\int \frac{ds}{y}$ ஒரு மாறிலி என நிரூபி. இதில் a, b, c, d என்பவை $ad-bc=1$ என்றவாறு இருக்கும் மெய்யெண்களாகும்.

$\dfrac{ds}{y} = \dfrac{d\sigma}{v}$ என நிரூபித்தால் போதுமானது.

$$z=(b-dw) / (cw-a).$$

$$\therefore \quad dz = \frac{dw}{(cw-a)^2}, \quad \because \quad ad-bc=1.$$

$$ds = |dz| = \frac{|dw|}{(cu-a)^2+c^2v^2} \quad \dots \quad (1)$$

$$\text{மேலும்},\ 2iy = z-\bar{z} = \frac{b-dw}{cw-a} - \frac{b-d\bar{w}}{c\bar{w}-a}$$

$$= \frac{(ad-bc)(w-\bar{w})}{c^2 w\bar{w} - ac(w+\bar{w}) + a^2}$$

$$= \frac{2iv}{c^2(u^2+v^2) - 2uac + a^2}$$

$$\therefore\ y = \frac{v}{(cu-a)^2 + c^2v^2} \qquad \dots (2)$$

(1), (2)-ல் இருந்து $\dfrac{ds}{y} = \dfrac{d\sigma}{v}$ என அறிக.

மாதிரி: 10. $|\lambda| = 1$ ஆனால் $x = \{a\lambda + (b/\lambda)\}/2$ என்பது ஒரு நீள் வளையத்தை வரைகிறது என நிரூபி. இதன் பேரச்சு, சிற்றச்சு ஆகியவை $|a| + |b|$, $|a| - |b|$ என்றும், இதன் குவியங்களை $x^2 = ab$-யில் இருந்து பெறலாம் என்றும் நிரூபி.

$$x = \tfrac{1}{2}\left(a\lambda + \frac{b}{\lambda}\right)$$

$$\therefore\ x + \sqrt{ab} = \tfrac{1}{2}\left[\sqrt{a\lambda} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{\lambda}}\right]^2$$

$$x - \sqrt{ab} = \tfrac{1}{2}\left[\sqrt{a\lambda} - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{\lambda}}\right]^2$$

$$\therefore\ |x+\sqrt{ab}| + |x-\sqrt{ab}| = |a\lambda| + \left|\frac{b}{\lambda}\right|$$

$$= |a| + |b|, \text{ ஏனெனில் } |\lambda| = 1.$$

$\therefore$ இதன் குவியங்கள் $\sqrt{ab}$, $-\sqrt{ab}$ என்றும், இதன் பேரச்சு $|a| + |b|$ என்பதும் தெளிவு. மற்றவை பயிற்சிக்காக!

மாதிரி: 11. $\bar{a}wz - bw - \bar{b}z + a = 0$. என்ற மாற்றம் $|z| = 1$-ஐ $|w| = 1$ ஆக மாற்றுகிறது என நிரூபி. முதல் வட்டத்தின் உட்புறம், இரண்டாம் வட்டத்தின் உட்புறமாக மாற நிபந்தனை என்ன? இதில் மாற்றம் அடையாத இரு புள்ளிகளும் தன் மாற்றுப் புள்ளிகள் என நிரூபி.

இதில் $z = (bw-a) / (\bar{a}w-\bar{b})$ ... (1)

$$\therefore \quad z\bar{z}-1 = \frac{(bw-a)}{(\bar{a}w-\bar{b})} \frac{(\bar{b}\,\bar{w}-\bar{a})}{(a\bar{w}-b)} - 1.$$

$$|z|^2-1 = \frac{(bw-a)(\bar{b}\bar{w}-\bar{a})-(\bar{a}w-\bar{b})(a\bar{w}-b)}{|a\bar{w}-b|^2}$$

$$= \frac{(b\bar{b}w\bar{w}-\bar{a}bw-a\bar{b}\bar{w}+a\bar{a})-(a\bar{a}w\bar{w}-\bar{a}bw-a\bar{b}\bar{w}+b\bar{b})}{|a\bar{w}-b|^2}$$

$$= \{|b|^2|w|^2+|a|^2-|a|^2|w|^2-|b|^2\} \div |a\bar{w}-b|^2$$

$$= \frac{(|w|^2-1)(|b|^2-|a|^2)}{|a\bar{w}-b|^2}$$

$\therefore \quad |z^2| = 1$ ஆனால் $|w|^2 = 1$.

மேலும் $|z| < 1$ ஆனால் $|w| < 1$. இப்பொழுது $|b^2| > |a|^2$ ஆக இருக்க வேண்டும். ஏன்?

இனி, இம்மாற்றத்தால் மாறாப்புள்ளிகள் எவையெனக் காண்போம். $w=z$ என்று போடு.

$$\bar{a}z^2-(b+\bar{b})z+a=0.$$

$$\therefore z_1 = \frac{(b+\bar{b})+\sqrt{(b+\bar{b})^2-4a\bar{a}}}{2\bar{a}} \text{ என்பதும்}$$

$$z_2 = \frac{(b+\bar{b})-\sqrt{(b+\bar{b})^2-4a\bar{a}}}{2\bar{a}} \text{ என்பதும்}$$

மாறாப் புள்ளிகளாம்.

$$\bar{z}_2 = \frac{(\bar{b}+b)-\sqrt{(\bar{b}+b)^2-4\bar{a}a}}{2a} \text{ ஆகும்}$$

$$\therefore z_1\bar{z}_2 = \frac{(b+\bar{b})^2-\{(b+\bar{b})^2-4a\bar{a}\}}{4a\bar{a}} = 1.$$

$\therefore$ z_1, z_2 என்பன தன் மாற்றுப் புள்ளிகளாகும். $z_1 = z_2$ ஆனால் என்னாகும்?

மாதிரி 12: $1, -1, \infty$-ஐ $1+i, 1-i, 1$ ஆக மாற்றும் மோபியஸ் மாற்றம் எது?

$$\frac{(w_1-w_4)(w_3-w_2)}{(w_1-w_2)(w_3-w_4)} = \frac{(z_1-z_4)(z_3-z_2)}{(z_1-z_2)(z_3-z_4)}$$

என்பது குறுக்குத் தகவு. கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளிகளை z_1, z_2, z_3; w_1, w_2, w_3 ஆகக் கொள்க. $z_4=z$, $w_4=w$ என்று போடு.

$$\frac{(1+i-w)\{1-(1-i)\}}{\{1+i-(1-i)\}(1-w)} = \frac{(1-z)(\infty+1)}{(1+1)(\infty-z)}$$

$$\therefore \quad \frac{(1+i-w)\,i}{2i\,(1-w)} = \frac{(1-z)(1+1/\infty)}{2(1-z/\infty)}$$

$$1+i-w = (1-w)(1-z)$$

$$1+i-w = 1-z-w+wz$$

$$z+i = wz$$

$$\frac{z+i}{z} = w$$

அடுத்த பகுதிக்கு முன் 6·3-ல் உள்ள கோண அளவு மாறு உருமாற்றத்திற்கும், கோணம் மாறு நிலையுறு மாற்றத்திற்கும் உள்ள வேறுபாட்டை நோக்குதல் நலம்.

6·15. தேற்றம் 1:

D என்ற அரங்கத்தில் $f(z)$ பகுமுறைச் சார்பாகவும், $f'(z) \neq 0$ ஆகவும் இருந்தால், அவ்வரங்கத்தில் $w=f(z)$ ஒரு கோணம் மாறு மாற்றமாகும்.

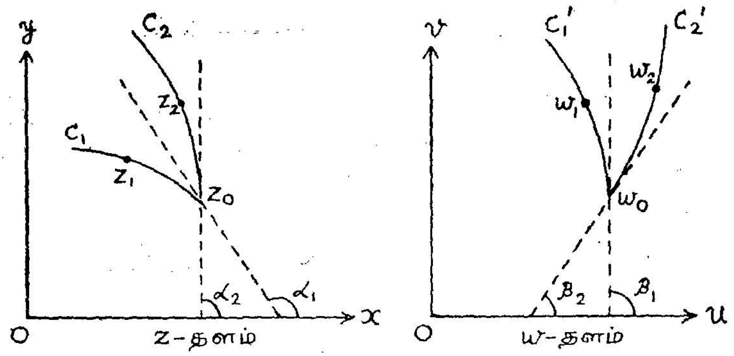
நிருபணம்:

$P\,(=z_0)$ என்னும் புள்ளி z-தளத்தில் D என்ற அரங்கத்தின் உட்புறமாக இருக்கட்டும். C_1, C_2 என்ற வளைவரைகள் z_0-ல் வெட்டிக் கொள்ளட்டும்.

$$|z_1-z_0| = r = |z_2-z_0| \qquad \ldots \quad (1)$$

என்பதற்கிணங்க P_1, P_2 என்ற புள்ளிகளை C_1, C_2 என்பவற்றில் எடுத்துக் கொள். இங்குள்ள தொடுகோடுகள் மெய்யச்சுடன்

உண்டாக்கும் கோணங்கள் α_1, α_2 ஆக இருக்கட்டும். C_1' C_2' என்பவை C_1, C_2-ன் பிம்பங்களாக இருக்கட்டும். w_1, w_2



படம்-32

என்பவை C_1', C_2'-ல் உள்ளன, w_0 ஆனது C_1', C_2' வெட்டும் புள்ளி என்பவை தெளிவு. இப்பொழுது (1)-ல் இருந்து

$$z_1 = z_0 + re^{i\theta_1} \; ; \; z_2 = z_0 + re^{i\theta_2}$$

$r \to 0$. ஆகையால் P_1P, P_2P என்பன P-யில் C_1, C_2க்குத் தொடுகோடுகளாக மாறும். அதாவது

$$\theta_1 \to \alpha_1 ; \; \theta_2 \to \alpha_2 .$$

இதே விதமாக, w-தளத்தில் P'-ல் C_1', C_2'-க்கு வரையப் பட்ட தொடுகோடுகள் மெய்யச்சுடன் முறையே β_1, β_2 என்ற கோணங்கள் உண்டாக்கட்டும். மேலும்,

$$w_1 - w_0 = \rho_1 e^{i\phi_1} \; ; \; w_2 - w_0 = \rho_2 e^{i\phi_2}$$

$\therefore$ $\rho_1 \to 0$ ஆகையால் $\phi_1 \to \beta_1$

$\rho_2 \to 0$ ஆகையால் $\phi_2 \to \beta_2$

இனி, $f'(z_0) = \underset{z \to z_0}{\text{எல்லை}} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$

$$= \underset{z_1 \to z_0}{\text{எல்லை}} \frac{f(z_1) - f(z_0)}{z_1 - z_0}$$

$$= \underset{z_1 \to z_0}{\text{எல்லை}} \frac{\rho_1 e^{i\phi_1}}{r e^{i\theta_1}}$$

$f'(z_0) \neq 0$; எனவே, அதை $R_0 e^{i\lambda}$ ஆகக் கொள்ளலாம்.

$$R_0 e^{i\lambda} = \underset{z_1 \to z_0}{\text{எல்லை}} \frac{\rho_1}{r} e^{i(\phi_1 - \theta_1)}$$

$\therefore \quad R_0 =$ எல்லை (ρ_1/r); $\lambda =$ எல்லை $(\phi_1 - \theta_1) = \beta_1 - \alpha_1$ ...(2)

இதேவிதமாக $\lambda = \beta_2 - \alpha_2$ என நிரூபிக்கலாம்.

$\therefore \quad \beta_1 - \alpha_1 = \beta_2 - \alpha_2$ அதாவது $\alpha_2 - \alpha_1 = \beta_2 - \beta_1$.

அதாவது $f(z)$ ஒரு கோணம் மாறா மாற்றம் ஆகும்.

6·15A. தேற்றம் 1. (வேறுமுறை)

z-தளத்தில் C_1 என்ற வளைவரையில் $P (= z)$, $P_1 (= z_1)$ என்பவை அடுத்தடுத்த புள்ளிகளாக இருக்கட்டும். ஆகவே, $z_1 = z + \Delta z$ என்று கொள்ளலாம்.

w-தளத்தில், C_1-ன் பிம்பமான C_1'-ல் $P' (= w)$, $P_1' (= w_1)$ என்பவை P, P_1-ன் பிம்பங்களாக இருக்கட்டும்.

$w = f(z)$ ஆனால்

$PP_1 = \Delta z; P'P'_1 = \Delta w$.

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{P'P'_1}{PP_1}$$

$$\text{வீச்சம்} \left(\frac{\Delta w}{\Delta z} \right) = \text{வீச்சம் } P'P'_1 - \text{வீச்சம் } PP_1$$

$$\therefore \underset{\Delta z \to 0}{\text{எல்லை}} \text{ வீச்சம்} \left(\frac{\Delta w}{\Delta z} \right) = \text{வீச்சம்} \left(\underset{P_1' \to P'}{\text{எல்லை}} P'P'_1 \right)$$

$$- \text{வீச்சம்} \left(\underset{P_1 \to P}{\text{எல்லை}} PP_1 \right)$$

i.e. வீச்சம் $\left(\frac{dw}{dz}\right)$ = வீச்சம் (P'-ல் உள்ள தொடுகோடு)

— வீச்சம் (P-ல் உள்ள தொடுகோடு)

$= \phi_1 - \theta_1$ ... (3)

இதில், θ_1 என்பது z-தளத்தில், P-ல் (z என்னும் புள்ளியில்) C_1-க்கு வரைந்த தொடுகோடு மெய்யச்சுடன் உண்டாக்கும் கோணமாகும்; ϕ_1 என்பது w-தளத்தில் P'-ல் (w என்னும் புள்ளியில்) C_1'-க்கு வரைந்த தொடுகோடு மெய்யச்சுடன் உண்டாக்கும் கோணமாகும்.

இப்பொழுது C_1', C_2' என்ற வளைகோடுகளுக்கிடையே உள்ள கோணம் $= \phi_2 - \phi_1$

$$= \left[\phi_2 - \text{வீச்சம்}\left(\frac{dw}{dz}\right)\right] - \left[\phi_1 - \text{வீச்சம்}\left(\frac{dw}{dz}\right)\right]$$

$= \theta_2 - \theta_1$ ... சமன்பாடு (3)-ஐப்பார்.

$=$ C_1, C_2 என்ற வளைகோடுகளுக்கிடையே உள்ள கோணம்.

இனி தேற்றம் 1-ன் மறுதலையை நிரூபிப்போம்.

6·15B தேற்றம் 2. D என்ற அரங்கத்தில், $w=f(z)$ ஒரு கோணம் மாறா மாற்றமாக இருந்தால் $f(z)$ ஒரு பகுமுறைச் சார்பு என நிரூபி.

$w=f(z)=u+iv$ ஆக இருக்கட்டும். z-தளத்திலுள்ள P, Q அடுத்தடுத்த புள்ளிகளானால் $PQ=ds$ என்று சொல்லலாம். w-தளத்தில் P', Q' என்பவை P, Q-ன் பிம்பங்களானால் $P'Q'=d\sigma$ எனக் கொள்ளலாம். இப்பொழுது

$$ds^2 = dx^2+dy^2; \quad d\sigma^2 = du^2+dv^2$$

மேலும், $du = \dfrac{\partial u}{\partial x}\, dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}\, dy$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}\, dx + \frac{\partial v}{\partial y}\, dy$$

$$\therefore \quad d\sigma^2 = (u_x\, dx+u_y\, dy)^2+(v_x\, dx+v_y\, dy)^2$$

$$d\sigma^2 = (u_x^2+v_x^2)\, dx^2+(u_y^2+v_y^2)\, dy^2$$

$$+\, 2\,(u_x u_y+v_x v_y)\, dx\, dy \qquad \text{... (1)}$$

இது கோணம் மாறு மாற்றம். ஆகையால் $d\sigma^2/ds^2$ ஆனது திசைகள் மாறுவதால் மாறுதலொன்று,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \quad \ldots \quad (2)$$

(1)-ஐயும் (2)-ஐயும் ஒப்பிடுங்கால்

$$\frac{u_x^2 + v_x^2}{1} = \frac{u_y^2 + v_y^2}{1} = \frac{u_x u_y + v_x v_y}{0} \quad \ldots \quad (3)$$

$$\therefore \quad u_x^2 + v_x^2 = u_y^2 + v_y^2 \quad \ldots \quad (4)$$

மேலும், $u_x u_y + v_x v_y = 0 \quad \ldots \quad (5)$

எனவே $\dfrac{u_x}{v_y} = -\dfrac{v_x}{u_y} = k$ ஆனால்,

$$u_x = k\, v_y; \quad v_x = -k\, u_y. \quad \ldots \quad (6)$$

இதை (4)-ல் பிரதியிட $k^2 (v_y^2 + u_y^2) = u_y^2 + v_y^2$

$$\therefore \quad k = \pm 1.$$

$k = 1$ ஆனால் $u_x = v_y; \quad v_x = -u_y \quad \ldots \quad (7)$

$k = -1$ ஆனால் $u_x = -v_y; \quad v_x = u_y \quad \ldots \quad (8)$

(7)-வது சமன்பாடுகள் காஷி ரைமன் சமன்பாடுகள். ∴ $f(z)$ ஒரு பகுமுறைச் சார்பு என அறிகிறோம். (8)-வது சமன்பாடுகளில் v-குப் பதில் $-v$ போட்டால் (7)-வது சமன்பாடுகள் கிடைக்கின்றன. ∴ (8)-ல் உள்ளது கோண அளவு மாறு மாற்றமாகும். இதில் குறிகள் மாறுபடுகின்றன. ஆகையால் கோணத்தின் அளவும், குறியும் மாறு மாற்றங்களே, அதாவது கோணம் மாறு மாற்றங்களே பகுமுறைச் சார்புகளாகும்.

குறிப்பு 1: $R_o = |\, f'(z_0) \,| = \underset{z_1 \to z_0}{\text{எல்லை}} \dfrac{\rho_1}{r}$

என்பதை உருப்பெருக்கக் கெழு என்று சொல்வோம். கொடுக்கப்பட்ட ஒரு z_0-க்கு, R_o மாறிலி என்பது தெளிவு. அதாவது எத்திக்கிலும் உருப்பெருக்கம் ஒரே அளவுதான் இருக்கும். ஆகவே z_0-க்கு அருகில், இம்மாற்றத்திற்குப் பின்னும் பிம்பமானது ஏறத்தாழ அதே உரு (shape) உடையதாக இருக்கும் எனலாம். ஆனல் வெவ்வேறு புள்ளிகளில், உருப்பெருக்கக் கெழு வெவ்வேறு மதிப்புடையதாகையால், முதல் உருவத்திற்கும், பிம்பத்திற்கும் பெருத்த வேறுபாடு இருக்கலாம்.

குறிப்பு 2: $f'(z) = 0$ ஆனால் என்னாகும்? என்பதை ஆராய, எளிதாக்கும் பொருட்டு $f''(z) \neq 0$ எனக் கொண்டு, 4·24-ல் உள்ள டெய்லர் தொடரை

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \frac{f'''(z_0)}{3!}(z-z_0)^3 + \dots$$

என எழுதலாம்.

$$\therefore \; f(z_1) - f(z_0) = a_2(z_1-z_0)^2 + a_3(z_1-z_0)^3 + \dots$$

இதில் $a_2 = \dfrac{f''(z_0)}{2!} \neq 0$ என்பதைக் கவனி.

$$\therefore \; w_1 - w_0 = a_2(z_1-z_0)^2 + a_3(z_1-z_0)^3 + \dots$$

$$\therefore \; \rho_1 e^{i\phi_1} = |a_2| r^2 e^{i(2\theta_1+\lambda)} + \dots$$

இதில் λ என்பது a_2-ன் வீச்சமாகும்.

$z_1 \to z_0$ ஆனால் எல்லை $\phi_1 = \beta_1 = 2\alpha_1 + \lambda$

இவ்வாறே $\beta_2 = 2\alpha_2 + \lambda$

$$\therefore \; \beta_2 - \beta_1 = 2(\alpha_2 - \alpha_1)$$

அதாவது, C_1'-க்கும், C'_2-க்கும் இடையே உள்ள கோணம் C_1-க்கும், C_2-க்கும் இடையே உள்ள கோணத்தைப் போல் இரு மடங்காகும்.

மேலும் $R_0 = |f'(z_0)| = 0$

$\therefore$ $f'(z_0) = 0$ ஆனால், z_0 என்னும் புள்ளியில் கோணம் மாறாத பண்பு கொள்ளத்தக்கதல்ல.

குறிப்பு 3: கோணம் மாறா உருமாற்றத்திற்கு வேண்டிய நிபந்தனை $\left|\dfrac{dw}{dz}\right| \neq 0$ என்று பார்த்தோம். $f(z)$ ஆனது பகுமுறைச் சார்பாதலின்,

$$\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{vmatrix}$$

$$= u_x^2 + v_x^2$$

$$= |f'(z)|^2, \quad \because f'(z) = u_x + iv_x$$

$$\neq 0.$$

ஆகவே, இந்த நிபந்தனையை $\frac{\partial (u, v)}{\partial (x, y)} \neq 0$ எனவும் எழுதலாம்.

6·16. வகைக்கெழு பூச்சியப் புள்ளி

$w = f(z)$ என்ற உருமாற்றத்தில், z என்னும் புள்ளியில் $f'(z) = 0$ ஆக இருந்தால் அதை (critical point) வகைக்கெழு பூச்சியப் புள்ளி என்போம்.

எடுத்துக்காட்டாக, $w = z^3 - 1$ என்ற உருமாற்றத்தைக்கவனி.

$z = re^{i\theta}$ என்றும் $(w+1) = \rho e^{i\phi}$ எனவும் கொண்டால், $z=0$-ல் உள்ள $\theta = \alpha$ என்னும் ஆரையானது $w = -1$-ல் உள்ள $\phi = 3\alpha$ என்னும் கோடாகும். எனவே z-தளத்தில் இரு கோடுகளுக்கிடையே உள்ள கோணமானது w-தளத்தில் 3 மடங்காகிறது. $\therefore$ இது கோண மாரு மாற்றம் அல்ல.

இப்பொழுது முதல் $(n-1)$ வகைக்கெழுக்கள் பூச்சியமெனக் கொள்வோம். அப்படியானல் டெய்லர் தேற்றத்தின்படி (டெய்லர் தேற்றத்தை அடுத்த அத்தியாயத்தில் நிரூபிப்போம்.)

$$f(z) = f(z_0) + \sum_{r=n}^{\infty} \frac{f^{(r)}(z_0)}{r!}(z - z_0)^r$$

$$\therefore \; f(z_1) - f(z_0) = a_n (z_1 - z_0)^n + \dots$$

இதில் $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \neq 0.$

$$\therefore \; w_1 - w_0 = a_n (z_1 - z_0)^n + \dots$$

$$\therefore \; \rho_1 e^{i\phi_1} = |a_n| r^n e^{i(n\alpha_1 + \lambda_n)} + \dots$$

இதில் λ_n = வீச்சம் $(a_n) + \dots$

இப்போது, எல்லையைக் கண்டுபிடிப்போமானல்

β_1 = எல்லை $\phi_1 = n\alpha_1 + \lambda_n$

β_2 = எல்லை $\phi_2 = n\alpha_2 + \lambda_n$

$$\therefore \; \beta_2 - \beta_1 = n(\alpha_2 - \alpha_1)$$

$\therefore$ இரு வளைவரைகளுக்கிடையே உள்ள கோணம் n மடங்கு அதிகரிக்கிறது.

இனி உருப்பெருக்கக் கெழுவைக் காண்போம்.

$$R_0 = \text{எல்லை} \ \frac{\rho_1}{r} = 0 \text{ என்பது தெளிவு.}$$

ஆகவே இது கோணம் மாரு மாற்றம் அன்று.

குறிப்பு: பொதுவாக $R_0 = |f'(z_0)|$ என்பது உருப்பெருக்கக் கெழுவாகும். 6·15. தேற்றம் 1-ல் (2)-வது சமன்பாட்டைப் பார்.

சில முக்கியமான உருமாற்றங்கள்

6·17. $w=z^n$ என்ற உருமாற்றத்தை எடுத்துக்கொள்வோம். இதில் n ஒரு மிகை முழு எண்ணுக இருக்கட்டும். இது ஒரு கோணம் மாரு மாற்றம் என்பது தெளிவு. ஆனல், $z=0$, என்ற புள்ளியில் மட்டும், $\frac{dw}{dz} = nz^{n-1} = 0$. ஆகையால், இது கோணம் மாருமாற்றமாக இராது. மேலும் இது (1 — 1) ஒன்றுக்கொன்று சார்பு அல்ல என்பதும் தெளிவு. இதை n — 1, (n-க்கு ஒன்று) சார்பு என்று சொல்வது பொருத்தமாயிருக்கும்!

இப்போது $w=u+iv=\rho e^{i\phi}$ ஆகவும்

$z=u+iy=re^{i\theta}$ ஆகவும் இருக்கட்டும்.

அப்படியானல்,

$$\rho(\cos\phi+i\sin\phi) = r^n(\cos\theta+i\sin\theta)^n$$
$$= r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$
$$\therefore \quad \rho=r^n;\ \phi = n\theta.$$

∴ z-தளத்தில் உள்ள $r=c$ என்ற வட்டமானது, w-தளத்தில் $\rho=c^n$ என்ற வட்டமாக மாறுகிறது. குறிப்பாக, z-தளத்தில் உள்ள அலகு வட்டம், w-தளத்தில் உள்ள அலகு வட்டமாகிறது.

z-தளத்தில் உள்ள $\theta=\alpha$ என்ற ஆரையானது, w-தளத்தில் உள்ள $\phi=n\alpha$ என்ற ஆரையாக மாறுகிறது. இது, இம்மாற்ற மானது ஆதியில் கோணம் மாருமாற்றம் அல்ல என்பதை எடுத்துக்காட்டுகிறது.

z-தளத்தில், ஆதியில் α கோணத்தைத் தாங்கும் ஆரைச் சிறையானது, w-தளத்தில் $n\alpha$ கோணத்தைத் தாங்கும் ஆரைச் சிறையாக மாறுகிறது என்றும் துணை முடிவு காணலாம்.

ஆகவே, பூச்சியத்தை விடுத்த ஓர் ஆரைச் சிறையை

$$0 < \text{வீச்சம் } z < \frac{\pi}{n}$$

என்பதற்கிணங்க எடுத்துக் கொண்டால் இதன் உட்பகுதியானது w-தளத்தில் $I(w) = v > 0$ என்ற மேல் பாதி தளமாக மாறும். இப்பகுதியில் இது கோணம் மாறு மாற்றமாக இருக்கவேண்டும்.

இதேவிதமாக $0 < \text{வீச்சம்} < \frac{2\pi}{n}$ என்ற ஆரைச்சிறையானது w-தளத்தின் முழுமையாக மாறும். இதில் u-அச்சின் மிகைப்பகுதியில் வெட்டு இருப்பதைக் கவனி.

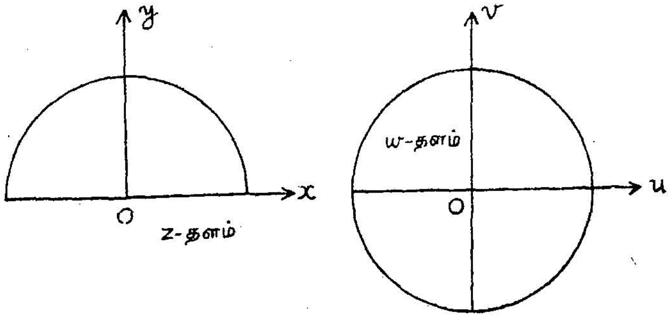
இனி $n=2$ ஆனால் என்னகும் என்பதை ஆராய்வோம். ($w=z^2$ என்னும் மாற்றத்தை ஆராயும்போது, $z=\sqrt{w}$ என்னும் மாற்றத்தையும் காண்கிறோம் என்பதை நினைவிற்கொள்க. ஆகவே, $w=\sqrt{z}$ என்பதை மீண்டும் ஆராயாமல் உங்கள் பயிற்சிக்கென விட்டு வைத்துள்ளோம்.)

$w=z^2$ என்ற சார்பை எடுத்துக்கொள்.

I. $z = r\,e^{i\theta}$ ஆகவும், $w = \rho\, e^{i\phi}$ ஆகவும் கொண்டால்

$$\rho\, e^{i\phi} = r^2 e^{2i\theta} \quad \therefore \quad \rho = r^2;\ \phi = 2\theta$$

$\therefore$ (r, θ) என்ற புள்ளியின் பிம்பம் $(r^2, 2\theta)$ ஆகும்.



படம் 33

z-தளத்தில் $0 \le \theta \le \pi$ ஆனால், z-தளத்தில் மெய்யச்சுக்குமேல் உள்ள பாதியானது w-தளத்தின் முழுமையையும் பிரதிபிம்பிக்கக் கூடியதாய் இருக்கும். குறிப்பாக, $r = \le r_0$, $0 \le \theta \le \pi$ என எடுத்துக் கொண்டால் z-தளத்தில் உள்ள அரை வட்டத்தின் பிம்பமானது w-தளத்தில் உள்ள முழு வட்டம் $w \le r_0^2$ ஆகும்.

இப்பொழுது z-தளத்தில் $r \leq r_0$, $0 \leq \theta < 2\pi$ என்ற முழு வட்டத்தை எடுத்துக்கொண்டால், $w = z^2$ என்பது 1 — 1 (ஒன்றுக் கொன்றுன) சார்பாக இருக்குமா? ஏன்?

II. $u + iv = w = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$

$$\therefore \quad u = x^2 - y^2; \quad v = 2xy \qquad \ldots \quad (1)$$

முதலாவதாக, $x = 1$ என்ற கோட்டின் பிம்பத்தை w-தளத்தில் காண்போம்.

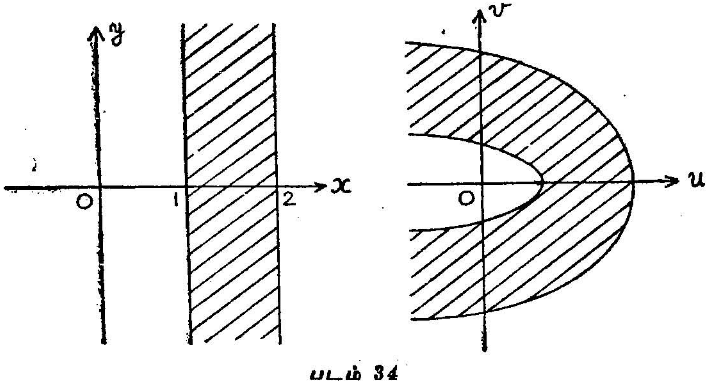
$$u = 1 - y^2; \quad v = 2y$$

$$\therefore \quad v^2 = 4y^2 = 4(1 - u)$$

$\therefore$ $v^2 = 4(1 - u)$ என்ற பரவளையம், $x = 1$ என்பதன் பிம்பம் எனக் காண்கிறோம்.

$\therefore$ z-தளத்தில் $x = 1$, $x = 2$ என்பவற்றிற்கிடையே உள்ள துண்டானது, w-தளத்தில் $v^2 = 4(1 - u)$; $v^2 = 16(4 - u)$ என்ற பரவளைவங்களுக்கிடையே உள்ள பரப்பாக மாறும்.

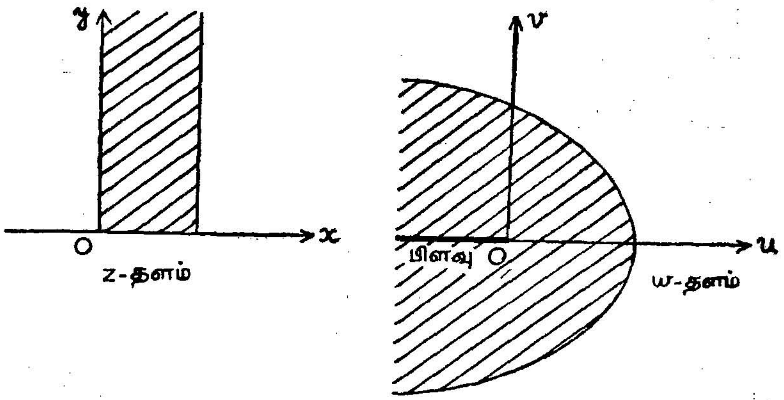
பொதுவாக, $x = a$-ன் பிம்பமான $v^2 = 4a^2(a^2 - u)$ என்ற பரவளையத்தில் a ஆனது பூச்சியத்தை அணுக, u-வும் பூச்சியத்தை அணுகவேண்டும். ஏனெனில் v^2 ஒரு மிகையெண் ஆதலின் $u < a^2$ ஆக இருக்கவேண்டும்.



படம் 34

இப்பொழுது, x பூச்சியத்தை அணுகட்டும். $v^2 = 4x^2(x^2 - u)$ குறுகிக்கொண்டே வரும். இதன் (latus rectum) செவ்வகலமான $4x^2$ பூச்சியத்தை அணுகுகிறது என்பதைக் கவனி. கடைசியில், 0-விலிருந்து $-\infty$ வரை ஒரு பிளவு (slit) இருப்பதைக் காண்கிறோம். எனவே, z-தளத்தில் $x = 0_\varepsilon$ -க்கும், $x = 1$-க்கும்

இடையே உள்ள துண்டானது $v^2=4\ (1-u)$ என்ற பரவளையத்தின் உட்புறமாகும். இதில், மெய்யச்சில் 0-ல் இருந்து $-\infty$ வரை பிளவு உண்டு.



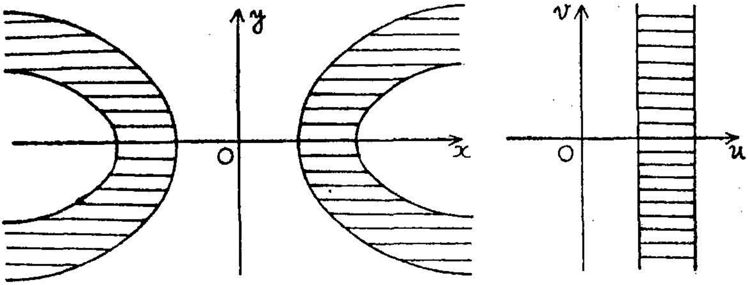
படம் 35

ஆகவே, $w=z^2$ என்ற மாற்றத்தால், $x=R(z)\geq 0$ என்ற z-தளத்தின் பாதிப்பரப்பு, w-தளத்தின் முழுமையாக (மெய்யச்சில் Ou' என்ற பிளவு நீங்கலாக) மாற்றப்படுகிறது.

குறிப்பு 1: $x=\lambda$ என்ற மெய்யச்சுக்கிணையான கோடுகள், $v^2=4\ \lambda^2\ (\lambda^2-u)$ என்ற பொதுக்குவிய பரவளையங்களாக மாறுகின்றன. இதன் உச்சி $(\lambda^2, 0)$. u-வின் மதிப்பு λ^2-ஐ விட அதிகமாக இருக்க முடியாது. எனவே இப்பரவளையங்கள் மெய்யச்சின் எதிர்திசை நோக்கி விரிந்து செல்லும். இதன் (latus rectum) செவ்வகலம் $4\lambda^2$ ஆனதால், இதன் குவியம் (0, 0) ஆனது (λ-ஐச் சாராததால்) பொதுக்குவியமாகும்.

குறிப்பு 2: இதேவிதமாக, $y=\mu$ என்ற கற்பனை அச்சுக் கிணையான கோடுகள் $v^2=4\mu^2\ \ (\mu^2+u)$ என்ற பொதுக்குவிய பரவளையங்களாக மாறுகின்றன. இதன் உச்சி $(-\mu^2, 0)$. u-வின் மதிப்பு $-\mu^2$-ஐ விட அதிகமாக இருக்க வேண்டும். எனவே இப் பரவளையங்கள் மெய்யச்சின் நேர் திசைநோக்கி விரிந்து செல்லும். இதன் செவ்வகலம் $4\mu^2$ ஆனதால், இதன் குவியம் (0, 0) ஆனது (μ-ஐச் சாராததால்) பொதுக்குவியமாகும்.

III. இப்பொழுது, $u=1$ என்பது z-தளத்தில் $x^2-y^2=1$ என்ற அதிபரவளைவைக் குறிக்கும். ∴ $u=1$, $u=2$ என்பவைகளுக்கிடையே உள்ள பரப்பானது, $x^2-y^2=1$; $x^2-y^2=2$ என்ற அதிபர வளைவுகளுக்கிடையே உள்ள பரப்பின் பிம்பமாகும்.



படம் 36

இதிலிருந்து, $u=1$ என்னும் கோட்டிற்கு வலப்புறம் உள்ள பரப்பானது, $x^2-y^2=1$ என்ற அதிபரவளைவின் உட்புறத்திற்கு இசைவாக இருக்கிறது என அறிவோம்.

இதேவிதமாக, $v=2$ என்ற கோடு, $xy=1$ என்ற அதிபர வளைவின் பிம்பமாகும். $v=2$, $v=4$ என்ற கோடுகளுக்கிடையே உள்ள பரப்பானது $xy=1$, $xy=2$ என்ற அதிபரவளைவுகளுக்கிடையே உள்ள பரப்பின் பிம்பமாகும். இதை விளக்க ஒரு படம் வரை. இதிலிருந்து $v=1$ என்ற கோட்டிற்கு மேலே உள்ள பரப்பானது $xy=1$ என்ற அதிபரவளைவின் உட்புறத்திற்கு இசைவானது என அறிகிறோம்.

IV. $|z-a|=c$ என்ற z-தளத்திலுள்ள வட்டத்தின் பிம்பம் w-தளத்தில் உள்ள $R=2c\,(a+c\cos\phi)$ என்ற 'லிமகன்' ஆகும்.

நிரூபணம்: $|z-a|=c$.

$$\therefore \quad z-a=ce^{i\theta}$$

$$\therefore \quad w=z^2=(a+ce^{i\theta})^2=a^2+2\,ac\,e^{i\theta}+c^2\,e^{2i\theta}$$

$$\therefore \quad w-(a^2-c^2)=c^2+2\,ac\,e^{i\theta}+c^2\,e^{2i\theta}$$

$$=c\,e^{i\theta}\{c\,e^{-i\theta}+2a+c\,e^{i\theta}\}$$

$$w-(a^2-c^2) = c \ e^{i\theta} \ (2c \cos\theta + 2a)$$

$$R\, e^{i\phi} = 2c\, e^{i\theta} \ (a + c\cos\theta)$$

குறிப்பு: w-தளத்தில், $w = a^2 - c^2$ என்னும் புள்ளியில் துருவத்தை எடுத்துள்ளோம்.

$$\therefore \quad R = 2\, c\, (a + c\cos\theta); \ \ \phi = \theta$$

$$\therefore \quad R = 2\, c\, (a + c\cos\phi)$$

இது ஒரு லிமகன் வளைவரையின் சமன்பாடாகும். இதில் $a = c$ ஆனால் $R = 2a^2\,(1 + \cos\phi)$ என்ற கார்டியாய்டு கிடைக்கும்.

VI. $|w-1| = \lambda$ என்ற வட்டங்கள், $|z-1|\ |z+1| = k$ என்ற லெம்னிஸ்கேட் வளைவரைகளின் பிம்பம் என நிரூபி.

நிரூபணம்: $|w-1| = \lambda$

$$\therefore \quad (w-1)\,(\bar{w}-1) = \lambda^2$$

$$w\bar{w} - (w+\bar{w}) + 1 = \lambda^2$$

$$u^2 + v^2 - 2u + 1 = \lambda^2$$

ஆனால் $u = x^2 - y^2; \quad v = 2xy$ ... (1) ஐப்பார்

$$\therefore \quad (x^2-y^2)^2 + 4x^2y^2 - 2x^2 + 2y^2 + 1 = \lambda^2$$

$$\therefore \quad (x^2+y^2)^2 + 1 + 2\,(x^2+y^2) - 4x^2 = \lambda^2$$

$$(x^2+y^2+1)^2 - 4x^2 = \lambda^2$$

$$(x^2+y^2+1+2x)\,(x^2+y^2+1-2x) = \lambda^2$$

$$\{(x+1)^2+y^2\}\ \{(x-1)^2+y^2\} = \lambda^2$$

$$|z+1|^2\ |z-1|^2 = \lambda^2$$

$$|z+1|\ |z-1| = \lambda$$

$\lambda = 1$ ஆனால் $|z^2-1| = 1.$

$$\therefore \quad |x^2-y^2-1+2i\,xy| = 1$$

$$\therefore \quad (x^2-y^2-1)^2 + 4x^2y^2 = 1$$

$$(r^2\cos 2\theta - 1)^2 + r^4\sin^2 2\theta = 1$$

$$\therefore \quad r^4\,(\cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta) - 2r^2\cos 2\theta + 1 = 1$$

$$\therefore \quad r^2 = 2\cos 2\theta$$

இது லெம்னிஸ்கேட் வளைவரையாகும்.

6·18. $w=\tan^2(z/2)$

I. $w=\tan^2(z/2)$ என்ற மாற்றத்தால் $x=0$, $x=\pi/2$ என்ற கோடுகளுக்கிடையே உள்ள பரப்பின் பிம்பம் w-தளத்தில் உள்ள $|w|=1$ என்ற வட்டமாகும். இதில் மெய்யச்சில் $w=-1$-ல் இருந்து $w=0$ வரை ஒரு பிளவு உண்டு.

நிரூபணம்: $w=\tan^2(z/2)$

$$\therefore \quad w=\frac{1-\cos z}{1+\cos z} \qquad \ldots (1)$$

(அ) இதில் $x=0$ என்று போடு.

$$w=\frac{1-\cos iy}{1+\cos iy}=\frac{1-\cosh y}{1+\cosh y}$$

w ஒரு மெய்யெண் என்பதைக் கவனி.

$$\text{எல்லை}_{y\to 0}\; w=0 \text{ என்பது தெளிவு.}$$

$$\text{எல்லை}_{y\to\infty}\; w=\text{எல்லை}_{y\to\infty}\frac{\dfrac{1}{\cosh y}-1}{\dfrac{1}{\cosh y}+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1.$$

$\therefore$ y ஆனது 0-ல் இருந்து ∞ வரை மாறும்போது w ஆனது 0-ல் இருந்து -1 வரை மாறும். இதேவிதமாக, y ஆனது 0-ல் இருந்து $-\infty$ வரை மாறும்போது w ஆனது 0-ல் இருந்து -1 வரை மாறும்.

(ஆ) இனிமேல், $x=\pi/2$ என்று போடு.

$$w=\frac{1-\cos z}{1+\cos z}=\frac{1-\cos(\pi/2+iy)}{1+\cos(\pi/2+iy)}$$

$$=\frac{1+\sin iy}{1-\sin iy}=\frac{1+i\sinh y}{1-i\sinh y}$$

$$\therefore \text{ வீச்சம் } w=\text{வீச்சம் }(1+i\sinh y)-\text{வீச்சம் }(1-i\sinh y)$$

$$=2\text{ வீச்சம் }(1+i\sinh y)$$

$$=2\tan^{-1}\sinh y.$$

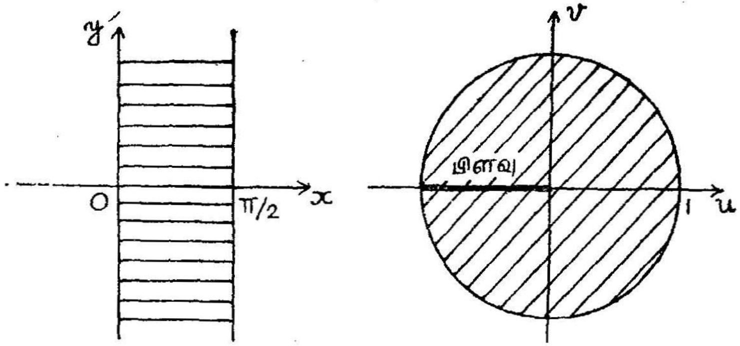
$\therefore$ $y=\infty$ ஆனல் $\sinh y=\infty$, $\tan^{-1}\sinh y=\pi/2$ ஆகும்.

$$வீ\ (w)=2\times\pi/2=\pi$$

இதே விதமாக $y=-\infty$ ஆனால், வீ $(w)=-\pi$.

மேலும், $|w| = \left|\dfrac{1+i\sinh y}{1-i\sinh y}\right| = 1$ ...ஏன்?

எனவே w ஆனது $|w|=1$ என்ற வட்டத்தை உண்டாக்குகிறது எனலாம். இதில் மெய்யச்சில் $u=-1$-ல் இருந்து $u=0$ வரை ஒரு பிளவு உண்டு.



படம்.37

இனிமேல் இத்துண்டின் உட்புறம், வட்டத்தின் உட்புற மாகிறது எனக் காண்பிப்போம்.

$$w=\frac{1-\cos z}{1+\cos z}=\frac{1-\cos(x+iy)}{1+\cos(x+iy)}$$

$$=\frac{1-\cos x\cosh y+i\sin x\sinh y}{1+\cos x\cosh y-i\sin x\sinh y}$$

$$\therefore\ |w|^2=\frac{(1-\cos x\cosh y)^2+(\sin x\sinh y)^2}{(1+\cos x\cosh y)^2+(\sin x\sinh y)^2}$$

<1 ஏனெனில் $\cos x>0;\ \cosh y>0$.

இங்கு $0<x<\pi/2$ என்பதைக் கவனி.

II $w=\tan^2(\pi\sqrt{z}/4)$ என்ற மாற்றத்தால் z-தளத்தில் $r=\sec^2(\theta/2)$ என்ற பரவளையத்தின் உட்புறம் $|w|=1$ என்ற வட்டத்தின் உட்புறமாக மாறுகிறது என நிரூபி.

$$z' = \sqrt{z} \quad \ldots \quad (1)$$

$$z'' = \frac{\pi z'}{2} \quad \ldots \quad (2)$$

$$w = \tan^2 (z''/2) \quad \ldots \quad (3)$$

என்ற 3 மாற்றங்களாலானது $w = \tan^2 (\pi\sqrt{z}/4)$ எனக் கருதலாம்.

(1)-ல் இருந்து. $z = (z')^2$

$$\therefore \quad x+iy = (x')^2 - (y')^2 + 2i\, x'\, y'$$

$$\therefore \quad x = (x')^2 - (y')^2\, ; \; y = 2x'y'$$

$$\therefore \quad y^2 = 4(x')^2 \{(x')^2 - x\} \quad \ldots \quad (4)$$

இப்பொழுது, $r = \sec^2 (\theta/2) \quad \therefore \quad r \cos^2 (\theta/2) = 1.$

$$\therefore \quad r\,(1+\cos\theta) = 2; \quad r = 2 - x$$

$$x^2 + y^2 = r^2 = 4 - 4x + x^2$$

$$y^2 = 4(1-x) \quad \ldots \quad (5)$$

6·17. II-ஐப்பார்க்கவும்.

(4), (5)-ல் இருந்து, $x' = 0$, $x' = 1$ என்ற கோடுகளுக்கிடையே உள்ள துண்டானது, $y^2 = 4(1-x)$ என்ற பரவளையத்தின் உட்பரப்பின் பிம்பம் என அறிவோம். ... (6)

இனி, $z'' = \pi z'/2$ என்பது ஒரு எளிய மாற்றம். இதில் $x'' = 0$; $x'' = \pi/2$ என்ற கோடுகளுக்கிடையே உள்ள துண்டானது $x' = 0$, $x' = 1$ என்ற கோடுகளுக்கிடையே உள்ள துண்டத்தின் பிம்பம் என்பது தெளிவு. ... (7)

கடைசியாக, $w = \tan^2 (z''/2)$ என்பது நாம் சற்று முன்னதாக I-ல் ஆராய்ந்த மாற்றம். இதன் விளைவாக, $|w| = 1$ என்ற வட்டத்தின் உட்புறம் $x'' = 0$; $x'' = \pi/2$ என்ற கோடுகளுக்கிடையே உள்ள துண்டத்தின் பிம்பம் என பார்த்தோம். ... (8)

(6), (7), (8)-ல் இருந்து II-ன் நிரூபணம் தெளிவாகிறது.

6·19. *A* அடுக்குக் குறிச் சார்பு: $w = e^z$.

e^z என்றவுடன் இது e-யின் z அடுக்கு என்றால் அது பொருளற்றதாகும். எனவே e^z-ஐ $\exp z$ என எழுதி

$\exp z = e^x (\cos y + i \sin y)$ என வரையறை செய்வோம். $y = 0$ ஆனால், $\exp x = e^x$ ஆகிறது.

மேலும், $x=0$ ஆனால் $\cos y+i\sin y$

$$= \left\{1-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}+\dots\right\}+i\left\{y-\frac{y^3}{3!}+\dots\right\}$$

$$= 1+iy-\frac{y^2}{2!}-i\frac{y^3}{3!}+\dots$$

$= e^{iy}$ என்று சொல்லலாம்.

$= \exp(iy)$.

இப்போது $\exp z = u+iv$ ஆனால்

$u=e^x\cos y;\quad v=e^x\sin y.$—(1) u, v என்பவைகளின் பகுதி வகைக்கெழுக்கள் தொடர்ச்சியானவை. அவை காஷி ரைமன் சமன்பாடுகளைத் திருப்தி செய்யும். மேலும்,

$$\frac{d\exp z}{dz}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=u+iv=\exp z$$

$$\therefore\ \frac{d\exp z}{dz}\neq 0.\quad (\because |e^z|=e^x\neq 0$$

$\therefore$ $w=\exp z$ என்பது கோணம் மாறா மாற்றமாகும்.

முடிவுள்ள எல்லா அரங்கங்களிலும் பகுமுறைச் சார்பாக உள்ள இச்சார்பினைப் பூரண சார்பு என்று சொல்லலாம்.

(5.17-ஐப்பார்)

$w=\exp z=\rho(\cos\phi+i\sin\phi)$ என எழுதினால்,

$\rho=e^x;\quad \phi=y$ ஆகும்.

$\therefore \rho$-வின் ஒவ்வொரு மதிப்புக்கும் இணங்க x-ன் மதிப்பும் உண்டு என்பதை நோக்குக. ஆனால் $\rho=0$ ஆக இருக்க முடியாது, $\because$ $e^x\neq 0$.

$\exp z_1\ \exp z_2 = \exp(z_1+z_2)$ என எளிதில் காட்டலாம்.

இடப்பக்கம் $= \rho_1(\cos\phi_1+i\sin\phi_1)\,\rho_2(\cos\phi_2+i\sin\phi_2)$

$= \rho_1\rho_2[\cos(\phi_1+\phi_2)+i\sin(\phi_1+\phi_2)]$

$= e^{x_1+x_2}[\cos(y_1+y_2)+i\sin(y_1+y_2)]$

$= \exp(z_1+z_2)$

இதேவிதமாக, $\exp z_1\div\exp z_2=\exp(z_1-z_2)$

exp z-ஐ ஒரு திரும்புச் சார்பு (periodic) என்றும் சொல்லலாம். ஏனெனில்

$$\exp(z+2\pi i) = \exp z \cdot \exp 2\pi i$$
$$= \exp z \cdot 1$$
$$= \exp z.$$

ஆகவே z-தளத்தில் கற்பனை அச்சில் 2π மாற்றத்திற்கு exp z-ன் உருமாற்றங்களை ஆராய்ந்தால் போதும் என்பது தெளிவாகிறது.

இப்பொழுது, $y=y_1$; $y=y_2$ என்ற கோடுகளுக்கிடையே உள்ள பரப்பானது w-தளத்தில் $\phi=\phi_1$; $\phi=\phi_2$ என்ற ஆரைகளுக்கிடையிலுள்ள முடிவிலி ஆரமுள்ள ஆரைச் சிறையாக மாறும். இதில் $|y_2-y_1|<2\pi$ ஆக இருக்க வேண்டும். ஏனெனில் exp z என்பது 2π-ஐ ஆவர்த்தன (காலவட்ட) நேரமாகக் கொண்டது என்று பார்த்தோம். $|y_2-y_1|=\pi$ ஆனால் ஆரைச்சிறையானது பாதிதளமாகும் என்பது தெளிவு.

இனிமேல், $x=x_1$; $x=x_2$ என்ற கோடுகளுக்கிடையில் உள்ள துண்டின் பரப்பானது $\rho_1<|w|<\rho_2$ என்ற வளைவடிவமான (annular) பரப்பாக மாறுகிறது என்பது தெளிவு.

கடைசியாக, $\exp \bar{z}=\overline{\exp z}$ ஆகும் என்பதை நிரூபிப்போம்.

$$\exp \bar{z} = \exp(x-iy)$$
$$= e^x[\cos(-y)+i\sin(-y)]$$
$$= e^x(\cos y-i\sin y)$$
$$= \overline{\exp z}$$

exp z-யின் வரையறையையும், பண்புகளையும் நினைவிற்கொண்டு அதை e^z என எழுத முற்படுவோம்!

குறிப்பு 1: சமன்பாடுகள் (1)-ல் இருந்து.

$$w = u+iv = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y+i\sin y)$$

$$u=e^x\cos y\ ;\ v=e^x\sin y \quad \text{என அறிவோம்.}$$

இப்பொழுது y-அச்சுக்கிணையான $x = \lambda$ என்ற கோடுகளின் பிம்பத்தைக் காண்போம்.

$$u = e^{\lambda} \cos y; \; v = e^{\lambda} \sin y$$

$$\therefore u^2 + v^2 = e^{2\lambda}$$

λ-ன் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கு இவை ஆதியைப் பொது மையமாகக் கொண்ட வட்டங்களாகும்.

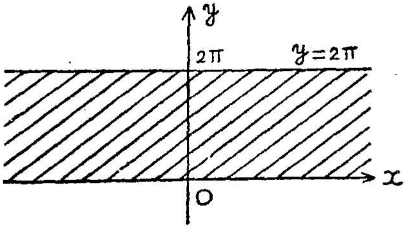
குறிப்பு 2: மெய்யச்சுக்கிணையான $y = \mu$ என்ற கோடுகளின் பிம்பத்தைக் காண்போம்.

$$u = e^{x} \cos \mu; \; v = e^{x} \sin \mu.$$

$$\therefore \frac{v}{u} = \tan \mu$$

அதாவது $u = \tan \mu . \quad u$

μ-வின் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கு, இவை ஆதி வழியே செல்லும் கோடுகளைக் குறிக்கும் என்பது தெளிவு.



படம் 38

குறிப்பு 3: சிறப்பாக $w = e^z$ என்ற மாற்றத்தால், $y = 0$, $y = 2\pi$ என்ற இணைகோடுகளுக்கிடையே உள்ள துண்டத்தின் பிம்பமானது w-தளத்தின் முழுமையுமாகும் என்பதை நோக்குக.

6·19B மடக்கைச்சார்பு: $w = \log z$.

$$z = r(\cos\theta + i \sin\theta).$$

$$= re^{i\theta}.$$

$$\therefore \log z = \log r + i\theta.$$ இதில் $r > 0$

மேலும் $e^{i\theta}$ ஒரு திரும்புச் சார்பு எனப்பார்த்தோம்.

$$\therefore \log z = \log r + i(\theta \pm 2n\pi) \qquad n=0, 1, 2....$$

ஆகவே log z ஒரு பல் மதிப்புடைய சார்பு. நாம் சாதாரண மாக, சார்புகளை ஒரே மதிப்புடையனவாகக் கொள்வோம். இப்பொழுது $-\pi < \theta \leq \pi$ என்பதை θ-வின் முதல் மதிப்பாக (principal value) கொண்டு அதற்கிசைய உள்ள log z-ஐ மடக்கை யின் முதல் மதிப்பாகக் கொள்வோம். இனி log z என்றால் அதன் முதல் மதிப்பையே குறிப்பிடுவோம். ஆகவே,

$$\log z = \log r + i\theta \qquad [\, r > 0, -\pi < \theta < \pi]$$

என்னும் சார்பு ஆதியை விடுத்து மற்றப்புள்ளிகளில் எல்லாம் வரையறுக்கப்பட்டிருக்கிறது. மேலும்,

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r};\ \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0;\ \frac{\partial v}{\partial r} = 0,\ \frac{\partial v}{\partial \theta} = 1$$

என்பவைகள் தொடர்புடைச் சார்புகள். இவை காஷி ரைமன் சமன்பாடுகளுக்கு இசைய உள்ளன. எனவே $r > 0$, $-\pi < \theta < \pi$ என்ற அரங்கில் log z ஒரு பகுமுறைச் சார்பாகும். இதன் வகைக்கெழுவை,

$$\frac{d \log z}{dz} = \exp(-i\theta).\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

$$= \frac{1}{r\exp(i\theta)} = \frac{1}{z}$$

எனக் காண்கின்றோம்.

இனி $w = \log z$-ஆல், w-தளத்தில் ஏற்படும் மாற்றங்களைக் காண்போம்.

$$u+iv = w = \log z = \log r + i\theta$$

$$\therefore \quad u = \log r\,;\ v = \theta.$$

(i) ஆதியை மையமாகக் கொண்ட வட்டங்கள் v-அச்சுக் கிணையான கோடுகள் ஆகின்றன. ஏனெனில், $r=k$ ஆனல், $u=\log k$-என்பது v அச்சுக்கு இணைகோடு.

(ii) ஆதி வழிசெல்லும் கோடுகள் u-அச்சுக்கிணையான கோடுகளாக மாறும். ஏனெனில்,

$\theta = \alpha$ ஆனால், $v = \alpha$ ஆகும்.

$v = \alpha$ என்பது u-அச்சுக்கு இணைகோடு.

(iii) z-தளமானது 2π அகலமுள்ள துண்டமாக மாறுகிறது. $P(r, \theta)$ என்பது z-தளத்திலுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளியாக இருக்கட்டும். θ ஆனது $-\pi < \theta \leq \pi$ ஆக இருக்கும். $\therefore$ v ஆனது $-\pi < \theta \leq \pi$ ஆக இருக்க வேண்டும். மேலும் r-ன் மதிப்பு $0 < r < \infty$ ஆக இருக்கலாம். $\therefore$ $u = \log r$-ன் மதிப்பு $-\infty < u < \infty$ ஆக இருக்கும். ஆகவே w-தளத்தில் $v = \pm\pi$ என்ற கோடுகளுக்கிடையே உள்ள துண்டம் z-தளத்தின் பிம்பமாகும்.

குறிப்பு. θ-வை $\theta_0 < \theta < \theta_0 + 2\pi$ என இருக்கும்படி $\log z$-ஐ வரையறுக்க இயலும். இப்போது z-தளத்தின் பிம்பம் $v = \theta_0$, $v = \theta_0 + 2\pi$ என்னும் கோடுகளுக்கிடையே உள்ள பகுதியாகும். ஒரு பல் மதிப்புடைய சார்பின் கிளை ஒரே மதிப்புடையதாக இருக்கவேண்டும். எனவே θ_0 எதுவாயினும் $\theta_0 < \theta < \theta_0 + 2\pi$ ஒரு கிளையைக் குறிக்கும். $-\pi < \theta < \pi$ பிரதம கிளையாகும்.

ஆதியிலும், $\theta = \pi$ என்ற மெய்யச்சின் குறைப் பகுதியில் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் $\log z$-வரையறுக்கப்படவில்லை. இவைகளைச் சிறப்புப் புள்ளிகள் என்போம். இவற்றின் வரையறை கூறி வகைப் படுத்தும் முறையைப் பின்னர் காண்போம். $\theta = \pi$ என்பதைக் கிளையிலுள்ள வெட்டு எனலாம். ஏனெனில் இது பிரதம கிளையை வரையறுக்கிறது. இவ்வாறு எல்லா வெட்டுகளுக்கும் பொதுவான ஆதியைக் கிளைப்புள்ளி என்போம்.

இனி, மடக்கைச் சார்பும் அடுக்குக் குறிசார்பும் நேர் மாறானவை என்பதை நிரூபிப்போம்.

$$\begin{aligned} \exp(\log z) &= \exp(\log r + i\theta) \\ &= \exp(\log r) \cdot \exp(i\theta) \\ &= r e^{i\theta} = z. \qquad \ldots (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log(\exp z) &= \log(e^x \cdot e^{iy}) \\ &= \log e^x + \log e^{iy} \\ &= x + iy = z. \qquad \ldots (2) \end{aligned}$$

(1), (2) என்ற சமன்பாடுகளில்

$$z = r\,[\cos(\theta + 2k\pi) + i\sin(\theta + 2k\pi)]$$

என ஆரம்பித்தால், இறுதியிலும் அதே k-ஐ உடைய z கிடைக்கும் என்பது நோக்கற்பாலது.

இறுதியாக,

$$\log z_1 z_2 = \log z_1 + \log z_2 \quad \ldots \quad \text{(i)}$$

$$\log (z_1/z_2) = \log z_1 - \log z_2 \quad \ldots \quad \text{(ii)}$$

$$\log z^n = n \log z \quad \ldots \quad \text{(iii)}$$

என்ற வாய்ப்பாடுகளும் பொருத்தமானவை என்று குறிப்பிடுகிறோம். (i)-ஐ மட்டும் நிருபிப்போம்.

$$\begin{aligned}\log z_1 z_2 &= \log (r_1 r_2) + i(\theta_1 + \theta_2)\\ &= \log r_1 + \log r_2 + i\,\theta_1 + i\,\theta_2\\ &= \log r_1 + i\,\theta_1 + \log r_2 + i\,\theta_2\\ &= \log z_1 + \log z_2.\end{aligned}$$

இதில் ஒரு குறிப்பிட்ட கிளையிலிருந்து மடக்கை எடுக்கிறோம். இல்லாவிடில் θ ஆனது $2k\pi$ அளவில் மாறுபடும் என்பதைக் கவனி.

மாதிரி 1: $w = \log \dfrac{z-1}{z+1}$ ஆனால், $u=0$, $v=0$ என்பவை எவற்றின் பிம்பங்கள் எனக் கண்டுபிடி.

$$\zeta = \frac{z-1}{z+1} \text{ ஆகவும், } w = \log \zeta \text{ ஆகவும் இருக்கட்டும்.}$$

$\zeta = \xi + i\eta$ ஆனால்,

$$\xi + i\eta = e^{u+iv} = e^u \,.\, (\cos v + i \sin v)$$

$$\therefore \quad \xi = e^u \cos v; \quad \eta = e^u \,.\, \sin v \quad \ldots \quad (1)$$

$$\therefore \quad \xi^2 + \eta^2 = e^{2u}; \quad \tan v = \xi/\eta \quad \ldots \quad (2)$$

$\therefore$ $u=0$ ஆனால் $\xi^2 + \eta^2 = 1$

அதாவது $|\zeta| = 1$

$$\therefore \quad \left|\frac{z-1}{z+1}\right| = 1$$

இது 1, −1-ஐ இணைக்கும் கோட்டின் மையக்குத்துக் கோடு

$$\therefore \quad x=0$$

∴ $u=0$ என்பது, $x=0$ என்பதின் பிம்பம்.

மேலும், $v=0$ ஆனுல் $\eta=0$ ஆகும் ... (1)-ஐப்பார்

$$\xi+i\eta=\frac{z-1}{z+1}=\frac{x+iy-1}{x+iy+1}=\frac{(x-1+iy)(x+1-iy)}{(x+1)^2+y^2}$$

$$=\frac{x^2+y^2-1+2iy}{(x+1)^2+y^2} \qquad \dots (3)$$

∴ $\eta=0$ ஆனுல், $y=0$

∴ $v=0$ என்பது, $y=0$ என்பதின் பிம்பம்.

கடைசியாக, $y=mx$ என்ற கோட்டின் பிம்பத்தைக் காண்போம்.

(1)-ல் இருந்து $\rho=e^x$; $\phi=y$

∴ $y=mx$ ஆனுல், $\phi=m\log\rho$

அதாவது $\rho=e^{\phi/m}$ என்ற சுருளி (spiral) என்பது $y=mx$-ன் பிம்பமாகும்.

(2), (3)-ல் இருந்து $\xi^2+\eta^2=e^{2u}$

$$\therefore \frac{(x^2-1+y^2)^2+4y^2}{\{(x+1)^2+y^2\}^2}=e^{2u}$$

$$\therefore e^{2u}=\frac{(x^2-1)^2+2y^2(x^2-1)+y^4+4y^2}{\{(x+1)^2+y^2\}^2}$$

$$=\frac{(x^2-1)^2+2y^2(x^2+1)+y^4}{\{(x+1)^2+y^2\}^2}$$

$$=\frac{\{(x+1)^2+y^2\}\{(x-1)^2+y^2\}}{\{(x+1)^2+y^2)^2}$$

$$=\frac{(x-1)^2+y^2}{(x+1)^2+y^2}$$

இப்பொழுது $u=c$ என்பது எதன் பிம்பம்?

$$k=e^{2c}=\frac{(x-1)^2+y^2}{(x+1)^2+y^2}$$

$$\therefore \frac{1+k}{1-k}=\frac{(x+1)^2+y^2+(x-1)^2+y^2}{(x+1)^2-(x-1)^2}$$

$$\frac{1+k}{1-k} = \frac{2(x^2+y^2+1)}{4x}$$

$$\therefore\quad x^2+y^2-2\left(\frac{1+k}{1-k}\right)x-1=0.$$

இவ்வட்டத்தின் மையம் $\left(\frac{1+k}{1-k},\ 0\right)$ ஆனது x-அச்சில் உள்ளது. c-யின் வித்தியாசமான மதிப்புகளுக்கு இவ்வட்டங்கள் பொது அச்சுள்ள (coaxial) வட்டங்களாகும் என்பது தெளிவு.

இதே விதமாக, $\tan v = \frac{\xi}{\eta} = \frac{x^2+y^2-1}{2y}$

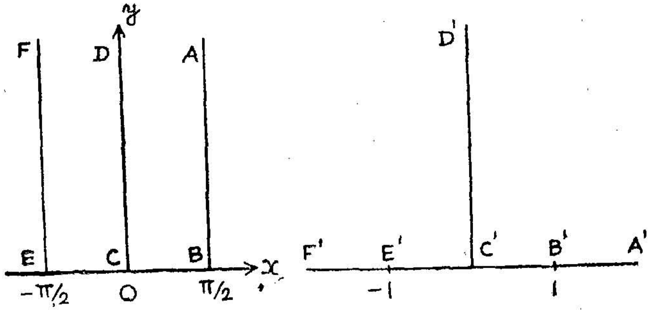
என்பதில் இருந்து $v=c$ ஆனால், c-யின் வித்தியாசமான மதிப்புகளுக்கு y-அச்சில் மையங்களைக் கொண்ட பொது அச்சுள்ள வட்டங்களைப் பெறலாம் என நிரூபி.

6·20. I $w=\sin z=\sin(x+iy)$

$$u+iv=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y$$

$$\therefore\quad u=\sin x\cosh y;\quad v=\cos x\sinh y.$$

$x=\pi/2$ என்பதன் பிம்பம் u அச்சில் $u\geq 1$ என்ற பகுதியாகும். $\cosh(-y)=\cosh y$ ஆனதால், இம்மாற்றமானது $x=\pi/2$ என்ற கோட்டின் மேல் பாகத்தை (அல்லது அடி பாகத்தை) மட்டும் எடுத்துக் கொண்டால் தான் 1—1 மாற்றமாகும்.



படம் 39

இனி, $y=0$ ஆனால், $u=\sin x$, $v=0$ ஆகும். x-அச்சின் முழு நீளமும் $-1\leq u\leq 1$ என மாற்றப்படுகிறது. இதை 1—1 மாற்றமாக்குவதற்கு $-\pi/2\leq x\leq \pi/2$-ஐ மட்டும் எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

கடைசியாக $x=0$ ஆனால், $u=0$, $v=\sinh y$. ∴ y-அச்சின் பிம்பம் v-அச்சாகும் என்பது தெளிவு.

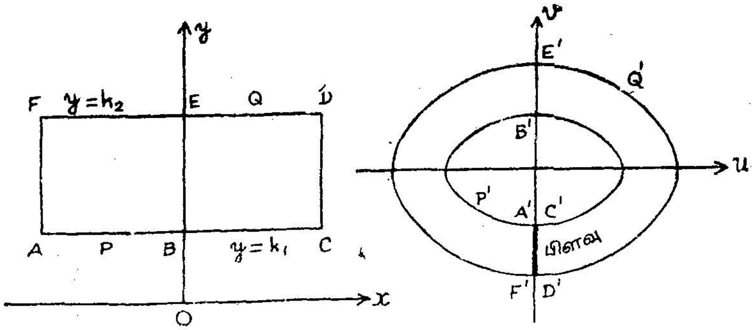
II இப்பொழுது $y=c$; $-\pi/2\leq x\leq \pi/2$ என்பதின் பிம்பம் என்ன? என்று பார்ப்போம். $c>0$ ஆனால், v ஒரு மிகையெண்ணாகும் என்பதை நோக்குக.

$$\therefore \quad \frac{u^2}{\cosh^2 c}+\frac{v^2}{\sinh^2 c}=1$$ என்ற நீள் வளையத்தின்

மேல்பாதி கிடைக்கிறது. $c<0$ ஆனால் நீள் வளையத்தின் கீழ்பாதி கிடைக்கும். c எதுவாயினும் இதன் குவியங்கள் ± 1 ஆகும்.

இதே விதமாக $x=c$; $-\pi/2<c<\pi/2$ என்பதன் பிம்பம் $\frac{u^2}{\sin^2 c}-\frac{v^2}{\cos^2 c}=1$ என்ற அதிபர வளையமாகும். $c>0$ ஆனால், $u>0$ ஆகும். ∴ அதிபர வளையத்தின் வலப்பகுதி கிடைக்கும். $c<0$ ஆயின், அதிபர வளையத்தின் இடப்பகுதி கிடைக்கும். இதன் குவியங்களும் ± 1 ஆகும்.

கடைசியாக, $-\pi\leq x\leq \pi$; $k_1\leq y\leq k_2$ என்பதன் பிம்பத்தைப் பார்ப்போம்.



படம் 40

$x=\pm\pi$ என்ற இரு பக்கங்களும் $u=0$; $v=-\sinh y$ $(k_1\leq y\leq k_2)$ என மாற்றப்படுகின்றன. ஆகவே, $k_1>0$ ஆனால் இச்செவ்வகத்தின் பிம்பமானது இவ்விரு நீள் வளையங்களுக்கிடையே உள்ள பரப்பாகும். இதில் v-அச்சின் கீழ்ப்பகுதியில் வெட்டு இருப்பதைக்கவனி. z-ஆனது $APBCDQEFA$ வழியே செல்லும் போது w-ஆனது $A'P'B'C'D'Q'E'F'A'$ வழியேசெல்லும் என்பதைப் படத்தில் பார்.

III $z=\sin w$ - என்ற மாற்றம் $u=\pm\pi/2$, $v=\pm\lambda$ என்ற செவ்வகத்தை, இரு பிளவுகள் உள்ள ஒரு நீள் வளையமாக மாற்றுகிறது என நிரூபி.

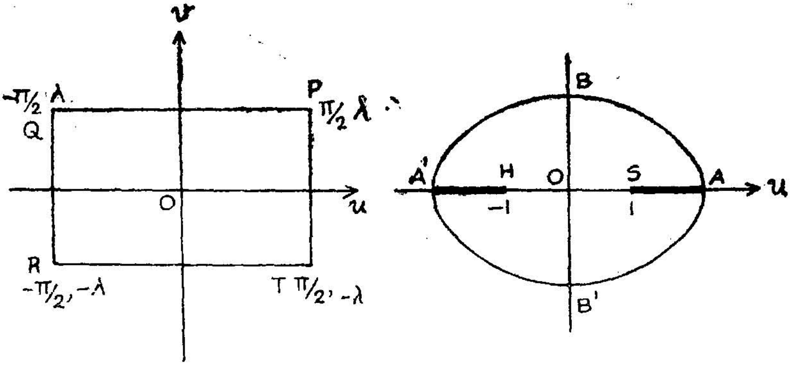
நிரூபணம்:

$z=\sin w$.

$\therefore \quad x+iy = \sin(u+iv) = \sin u \cosh v + i \cos u \sinh v$

$\therefore \quad x=\sin u \cosh v; \; y=\cos u \sinh v$

$$\therefore \quad \frac{x^2}{\cosh^2 v} + \frac{y^2}{\sinh^2 v} = 1 \quad \dots (1)$$



படம் 41

(1) ஆனது v-யின் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கு பொதுக் குவியங்களுக்குள்ள நீள் வளையங்களாகும் (confocal).

$-\pi/2 \le u \le \pi/2$ ஆக இருக்கும்போது $\cos u > 0$.

$\therefore v=+\lambda$ (λ ஒரு மிகையெண்) ஆனால் y-உம் மிகையெண் ஆதல் வேண்டும். $\therefore$ x-ன்மதிப்பு $-\cosh \lambda$-வுக்கும் $+\cosh \lambda$-வுக்கும் இடையே இருக்கும். $\therefore$ x-அச்சின் மேல் பகுதியிலுள்ள நீள் வட்டப் பகுதி கிடைக்கிறது.

இப்பொழுது $u=-\pi/2$ ஆனால், $y=0$; $x=-\cosh v$ ஆகும். $\therefore$ v-ஆனது λ-விலிருந்து 0 ஆகி பின் $-\lambda$-ஆக மாறும்போது x-ஆனது $-\cosh \lambda$-விலிருந்து -1-ஆகி பின் $-\cosh \lambda$-ஆக மாறுகிறது. (படத்தில் A'-ல் இருந்து H-க்குப்போய் பின்னரும் A'-க்கு வருகிறது.)

பின்பு $v=-\lambda$-ஆக இருக்கும்போது, z-ஆனது நீள் வளையத்தின் கீழ்ப்பகுதியை வரைகிறது.

அடுத்து, $u=\pi/2$ ஆனால், $y=0$; $x=\cosh v$-ஆகும். $\therefore$ v-ஆனது $-\lambda$-விலிருந்து 0 ஆகி பின் λ-ஆக மாறும்போது x-ஆனது $\cosh\lambda$-விலிருந்து 1 ஆகி பின் $\cosh\lambda$-ஆகிறது. (அதாவது A-யிலிருந்து S-க்குப் போய் பின்னரும் A-க்கு வருகிறது)

v-அதிகமாக ஆக, அச்சுகளின் நீளங்களும் அதிகமாகின்றன. எனவே செவ்வகத்தின் உட்புறமும், நீள் வளையத்தின் உட்புறமும் இசைவானவையாக இருக்கவேண்டும்.

6·21 I. $w=\left(\dfrac{z-c}{z+c}\right)^2$ என்ற மாற்றமானது z-தளத்தின் எப்பகுதியை, w-தளத்தின் மேல்பாதியாக மாற்றுகிறது எனக் கண்டுபிடி. (c ஒரு மிகையெண்)

$$u+iv=\left(\frac{x+iy-c}{x+iy+c}\right)^2$$

$$=\left\{\frac{(x-c+iy)\,(x+c-iy)}{(x+c+iy)\,(x+c-iy)}\right\}^2$$

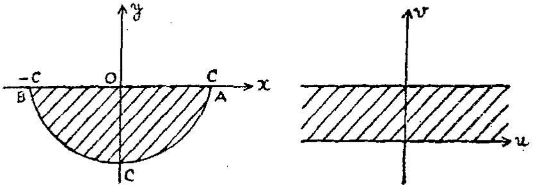
$$=\left\{\frac{x^2-c^2+y^2+2iyc}{(x+c)^2+y^2}\right\}^2$$

$$\therefore\ u=\frac{(x^2+y^2-c^2)^2-4c^2y^2}{\{(x+c)^2+y^2\}^2};\ v=\frac{4yc\,(x^2+y^2-c^2)}{\{(x+c)^2+y^2\}^2} \quad \ldots\ldots (1)$$

w-தளத்தின் மேல் பகுதியில் $v\geq 0$.

$\therefore\ y\,(x^2+y^2-c^2)>0$

$$\left.\begin{array}{l}\therefore\ y>0;\ x^2+y^2-c^2>0\\ \text{அல்லது, } y<0:\ x^2+y^2-c^2<0.\end{array}\right\} \quad \ldots (2)$$



படம் 42

$v=0$ ஆனால் $y=0$ அல்லது $x^2+y^2-c^2=0$.

வகை (i) $y=0$, ஆக இருக்கட்டும்.

இப்பொழுது $u = \dfrac{(x^2-c^2)^2}{(x+c)^4} = \left(\dfrac{x-c}{x+c}\right)^2$

$\therefore\ x = c$ ஆனால், $u=0$

$x = -c$ ஆனால், $u=\infty$.

எனவே, x-அச்சில் z ஆனது $x=c$ யில் இருந்து $x=-c$க்குச் செல்லும் போது w ஆனது u-அச்சில் $u=0$-ல் இருந்து $u=\infty$ வரை செல்கிறது. அதாவது z-தளத்தில் AOB-ன் பிம்பமானது w தளத்தில் Ou ஆகும்.

வகை (ii) $x^2+y^2=c^2$ ஆக இருக்கட்டும்.

$\therefore$ (1)-ல் இருந்து $u=-\dfrac{4c^2y^2}{\{(x+c)^2+y^2\}^2}$

i.e. $u=-\dfrac{4c^2(c^2-x^2)}{\{(x+c)^2+c^2-x^2\}^2} = \dfrac{4c^2(x^2-c^2)}{4c^2(x+c)^2}$

i.e. $u=\dfrac{x-c}{x+c}$

$\therefore\ x=c$ ஆனால், $u=0$ ஆகும். $x=-c$ ஆனால் $v=-\infty$ ஆகும்.

$\therefore$ வட்டத்தின் BCA என்ற அரை வளைவரையானது Ou'-ன் பிம்பமாகும்.

இனி (2)-ல் இருந்து z-தளத்தில்

(i) x-அச்சுக்குக் கீழே உள்ள அரை வட்டப்பகுதியின் உட்புறமும்

(ii) x-அச்சுக்கு மேலே உள்ள அரை வட்டத்தின் வெளிப் புறமும் w-தளத்தின் மேற்பகுதிக்கு இசைவாக உள்ளன என அறிகிறோம்.

6·22. $w=2z+z^2$ என்னும் மாற்றம் $|z|=1$ என்ற வட்டத்தை w-தளத்தில் கார்டியாய்டு ஆக மாற்றுகிறது என நிரூபி. மேலும், இவ்வட்டத்திலுள்ள சமகோண முக்கோணப் புள்ளிகளின் பிம்பப் புள்ளிகளில் கார்டியாய்டின் தொடுகோடுகள் இணைகோடுகள் என நிரூபி.

$\therefore\ \theta,\ \theta+(2\pi/3),\ \theta+(4\pi/3)$ என்னும் புள்ளிகளில்

$$\frac{dy}{dx} = -\cot\frac{3\theta}{2} \text{ அல்லது } -\cot\frac{3(\theta+2\pi/3)}{2}$$

$$\text{அல்லது } -\cot\frac{3(\theta+4\pi/3)}{2}.$$

இவை மூன்றும் சமம் என்பது தெளிவு. ∴ இவற்றில் உள்ள தொடுகோடுகள் இணையாக இருக்கும். ∴ w-தளத்திலும் இவை இணையாக இருக்கும். (ஏன்?)

6·23. $w = \frac{1}{2}\left\{(a-b)z + \frac{a+b}{z}\right\}$ ... a, b என்பவை மெய்யானவை.

$$\therefore\ u+iv = \frac{1}{2}\left\{(a-b)re^{i\theta} + \frac{a+b}{r}\cdot e^{-i\theta}\right\}$$

$$\therefore\ u = \frac{1}{2}\left\{(a-b)r + \frac{(a+b)}{r}\right\}\cos\theta$$

$$v = \frac{1}{2}\left\{(a-b)r - \frac{(a+b)}{r}\right\}\sin\theta. \qquad \ldots (1)$$

$$\therefore\ \frac{u^2}{\frac{1}{4}\left\{(a-b)r + \frac{a+b}{r}\right\}^2} + \frac{v^2}{\frac{1}{4}\left\{(a-b)r - \frac{(a+b)}{r}\right\}^2} = 1 \qquad \ldots (2)$$

இப்பொழுது, $|z| = r$ என்பது r-ன் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கு, ஒரே மைய வட்டங்களைக் குறிக்கும்.

(2)-ல் இருந்து, இவற்றின் பிம்பங்கள் பொதுக் குவியங்களுள்ள (confocal) நீள்வளையங்கள் ஆகும் என்பது தெளிவு. இக்குவியங்கள் $\pm\sqrt{(a^2-b^2)}$ என்பதை எளிதில் காணலாம்.

சமன்பாடுகள் (1)-ல் இருந்து r-ஐ நீக்க,

$u^2 \sec^2\theta - v^2 \operatorname{cosec}^2\theta = a^2 - b^2$

$$\frac{u^2}{(a^2-b^2)\cos^2\theta} - \frac{v^2}{(a^2-b^2)\sin^2\theta} = 1 \qquad \ldots (3)$$

$\zeta = (z+1)^2$ என்றும், $w = \zeta - 1$ என்றும் போடு. $|z| = 1$ ஆகையால், $z = e^{i\theta}$ என்றும், $\zeta = \rho e^{i\phi}$ என்றும் கொள்க.

$$\rho e^{i\phi} = (e^{i\theta}+1)^2 = (\cos\theta + i\sin\theta + 1)^2$$

$$= (1+\cos\theta)^2 + 2(1+\cos\theta)\, i\sin\theta - \sin^2\theta$$

$$= 1+2\cos\theta+\cos^2\theta - \sin^2\theta + i\,2(1+\cos\theta)\sin\theta$$

$$= 2\cos\theta(1+\cos\theta) + i\,2(1+\cos\theta)\sin\theta$$

$$= 2(1+\cos\theta)\, e^{i\theta}$$

$$\therefore \quad \phi = \theta;\ \rho = 2(1+\cos\theta) \qquad \dots (1)$$

$$\therefore \quad \rho = 2(1+\cos\phi) \qquad \dots (2$$

இது ζ-தளத்தில் ஒரு கார்டியாய்டு.

$w = \zeta - 1$ என்னும் மாற்றத்தின் விளைவு இடப்பெயர்ச்சி மட்டுமே. ஆகையால், w-தளத்திலும் இது ஒரு கார்டியாய்டு ஆகும்.

இனி, $|z| = 1$ என்ற வட்டத்தில் உள்ள உச்சிப் புள்ளிகளை θ, $\theta + (2\pi/3)$, $\theta + (4\pi/3)$ என எடுத்துக்கொள்ளலாம். $\therefore$ (ζ-தளத்தில் உள்ள) கார்டியாய்டில் இசைவான புள்ளிகள்

$$2\{1+\cos(\theta + k\pi/3)\},\ \theta + k\pi/3 \dots k = 0,\ 1,\ 2.$$

இப்பொழுது,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{d(r\sin\theta)}{d\theta}}{\dfrac{d(r\cos\theta)}{d\theta}}$$

$$= \frac{d\{2(1+\cos\theta)\sin\theta\}/d\theta}{d\{2(1+\cos\theta)\cos\theta\}/d\theta}$$

$$= \frac{(1+\cos\theta)\cos\theta - \sin^2\theta}{-\sin\theta(1+\cos\theta) - \sin\theta\cos\theta} = -\frac{\cos\theta + \cos 2\theta}{\sin\theta + \sin 2\theta}$$

$$= -\cot(3\theta/2)$$

$\therefore$ z-தளத்தில் ஆதிவழி செல்லும் கோடுகள், w-தளத்தில் அதிபரவளையங்கள் ஆகின்றன. இவைகளும்

$\pm\sqrt{a^2 - b^2}$, 0 என்ற பொதுக் குவியங்கள் உள்ளவை.

கடைசியாக, ஒரு சிறப்பு வகையை ஆராய்வோம்.

(2)-ல் $a-b=1=a+b$ என்று போடு.

$$\frac{u^2}{\frac{1}{4}\left(r+\frac{1}{r}\right)^2}+\frac{v^2}{\frac{1}{4}\left(r-\frac{1}{r}\right)^2}=1 \qquad \dots (4)$$

$|z|=r$ அல்லது $|z|=\frac{1}{r}$ என்ற வட்டத்தின் பிம்பம் (4)-ல் உள்ள நீள் வட்டமாகும். இப்போது, r ஆனது 1-ஐ அணுகினல் $\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)$ ஆனது 1-ஐயும், $\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)$ ஆனது ∞-ஐயும் அணுகுகிறது. ஆனல், $r\to 0$ ஆகும்போது $\frac{1}{r}\to\infty$. எனவே நீள் வளையத்தின் இரு அச்சுகளும் ∞-ஐ அணுகுகிறது எனலாம்.

$\therefore$ $|z|=1$ என்ற வட்டத்தின் உட்புறமும், வெளிப் புறமும் w-தளத்தின் முழுமைக்கும் இசைவாக இருக்கிறதென்றும், மெய்யச்சில் -1-ல் இருந்து $+1$ வரை பிளவு இருக்கிறதென்றும் காண்கிறோம். $|z|=1$ என்ற வட்டத்தின் பிம்பமானது w-தளத்தில் உள்ள குறுகிய நீள்வட்டம் ஆகும். இது மெய்யச்சில் உள்ள -1, 1 என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் வெட்டு எனலாம்.

குறிப்பு: $w=(z+1/z)/2$ ஆனல்

$$\frac{dw}{dz}=\frac{1}{2}\left(1-1/z^2\right)$$

எனவே, இதன் சிறப்புப்புள்ளிகள் -1, 1 ஆகும்.

6·24. $W=\dfrac{(1+z^3)^2-i\,(1-z^3)^2}{(1+z^3)^2+i\,(1-z^3)^2}$ என்ற மாற்றமானது

$|z|<1$, $0<$ வீச்சம் $z<\pi/3$ என்னும் பகுதியை $|W|<1$ ஆக மாற்றுகிறது என நிரூபி.

நிரூபணம்:

$$\zeta=z^3;\quad t=\frac{1+\zeta}{1-\zeta};\quad w=t^2;\quad W=\frac{w-i}{w+i}$$

என்ற 4 அடுத்தடுத்த மாற்றங்கள் கொடுக்கப்பட்ட மாற்றத் திற்குச் சமம் என்பதை நோக்குக.

I. $\zeta = z^3$

$z = r\, e^{i\theta}$ ஆனால் $\zeta = r^3\, e^{i3\theta}$

$\therefore \quad \rho = r^3; \quad \phi = 3\theta$

$0 <$ வீச்சம் $z < \pi/3 \quad \therefore \quad 0 <$ வீச்சம் $\zeta < \pi$

$|z| = 1 \quad \therefore \quad |\zeta| = 1$

$\therefore$ $0 <$ வீச்சம் $z < \pi/3$; $|z| < 1$ என்ற ஆரைச்சிறையானது (wedge), ζ-தளத்தில் $|\zeta| = 1$ என்ற மேல் அரைவட்டப் பகுதியாக மாறுகிறது.

II. $t = \dfrac{1+\zeta}{1-\zeta} \qquad \therefore \quad \zeta = \dfrac{t-1}{t+1}$

$$1-\zeta\bar{\zeta} = 1 - \left(\frac{t-1}{t+1}\right) \cdot \left(\frac{\bar{t}-1}{\bar{t}+1}\right)$$

$$= \frac{(t+1)(\bar{t}+1)-(t-1)(\bar{t}-1)}{|1+t|^2}$$

$$= \frac{2(t+\bar{t})}{|1+t|^2} = \frac{4\,R(t)}{|1+t|^2}$$

$\therefore \quad |\zeta| < 1$ ஆனால், $R(t) > 0$ ஆகும் ... (1)

இப்பொழுது $I(\zeta) = (\zeta - \bar{\zeta})/2i$

$$= \frac{1}{2i}\left\{\frac{t-1}{t+1} - \frac{\bar{t}-1}{\bar{t}+1}\right\}$$

$$= \frac{2(t-\bar{t})}{2i\,|1+t|^2}$$

$$= \frac{2.I(t)}{|1+t|^2}$$

$\therefore \quad I(\zeta) > 0$ ஆனால், $I(t) > 0$ ஆகும் ... (2)

ζ-தளத்தின்மேல் அரைவட்டமான $|\zeta| < 1$ என்பதில் $I(\zeta) > 0$; $|\zeta| < 1$ $\therefore$ (1), (2)-ல் இருந்து $R(t) > 0$; $I(t) > 0$ ஆகும். அதாவது, மேல் அரைவட்டப் பகுதிக்கு இசைவான பகுதி t-தளத்தின் முதல் (மிகை) காற்பகுதியாகும்.

III $\quad w = t^2$

$$u+iv = (p+iq)^2 = p^2-q^2+2ipq$$

$$\therefore \quad u = p^2-q^2; \quad v = 2pq$$

t-தளத்தில் $q=0$ ஆனல், $u=p^2; \quad v=0$

$\therefore$ p ஆனது 0-ல் இருந்து 1 வரையிலும், பின் 1-ல் இருந்து ∞ வரை செல்ல; u ஆனது 0-ல் இருந்து 1 வரையிலும், பின் 1-ல் இருந்து ∞ வரை செல்கிறது.

t-தளத்தில் $p=0$ ஆனல், $u=-q^2: \quad v=0$

$\therefore$ q ஆனது ∞-ல் இருந்து 0 வரை செல்ல, u ஆனது $-\infty$-ல் இருந்து 0 வரை செல்கிறது.

மேலும் $v=2pq>0 \quad (\because \; p>0, \; q>0$

$\therefore$ t-தளத்தின் முதல் காற்பகுதி, w-தளத்தின் மேற்பகுதியாக $I(w)>0$ என மாற்றப்படுகிறது.

IV கடைசியாக, $W = \dfrac{w-i}{w+i}$

$$|W| = \frac{|w-i|}{|w+i|} = \frac{\sqrt{u^2+(v-1)^2}}{\sqrt{u^2+(v+1)^2}} \quad \ldots (3)$$

w-ஆனது மெய்யச்சில் இருந்தால் $v=0$ ஆகும்

$$\therefore \quad |W| = \frac{\sqrt{u^2+1}}{\sqrt{u^2+1}} = 1.$$

$\therefore$ w-தளத்தில் உள்ள u-அச்சின் பிம்பம் $|W|=1$ என்ற வட்டமாகும்.

சமன்பாடு (3)-ல் இருந்து $v>0$ ஆனல்தான் $(v-1)^2 < (v+1)^2$ என்றும், $|W|<1$ ஆகும் என்றும் தெரிகிறது. அதாவது w-தளத்தின் மேற்பகுதி $|W|=1$ என்ற வட்டத்தின் உட்புறமாக மாற்றப்படுகிறது.

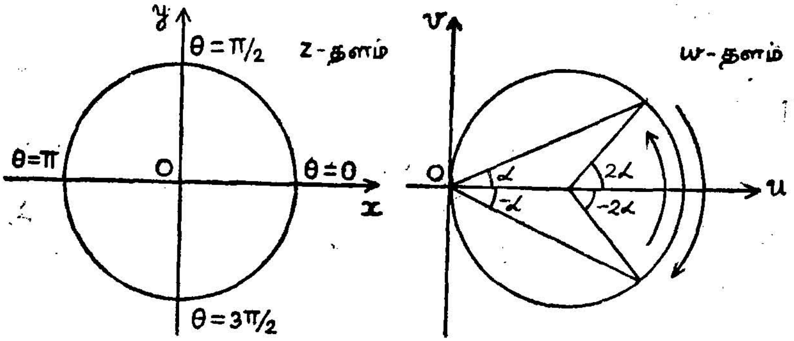
6·25. $w = \dfrac{4az \cot \alpha}{1+2 \cot \alpha . z - z^2}$, $\quad 0<\alpha<\pi/4$. என்ற மாற்றத்தினல், z-ஆனது $|z|=1$ என்ற வட்டத்தை ஒரு முறை சுற்ற, w-ஆனது 4α கோணத்தைத் தாங்கும் ஒரு வட்டவில்லை இரு முறை வரைகிறது என நிரூபி.

நிரூபணம்:

$$\frac{1+2z\cot\alpha-z^2}{z}=\frac{4a\cot\alpha}{w}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{z}+2\cot\alpha-z=\frac{4a\cot\alpha}{w} \qquad \ldots (1)$$

$|z|=1$ ஆனதால் $z=e^{i\theta}$ என எழுதலாம்.



படம் 43

$$\therefore\quad e^{-i\theta}+2\cot\alpha-e^{i\theta}=\frac{4a\cot\alpha}{\rho e^{i\phi}},$$

இதில் $w=\rho e^{i\phi}$

$$\therefore\quad 2\cot\alpha-2i\sin\theta=\frac{4a\cot\alpha}{\rho}(\cos\phi-i\sin\phi)$$

$$\therefore\quad 2\cot\alpha=\frac{4a\cot\alpha}{\rho}\cos\phi \qquad \ldots (2)$$

$$2\sin\theta=\frac{4a\cot\alpha}{\rho}\sin\phi \qquad \ldots (3)$$

$$\therefore\quad \frac{\sin\theta}{\cot\alpha}=\tan\phi \qquad \ldots (4)$$

(2)-ல் இருந்து $\rho=2a\cos\phi$ ... (5)

∴ $|z| = 1$ என்ற வட்டமானது, w-தளத்தில் $\rho = 2a\cos\phi$ என்ற வட்டமாக மாறுகிறது. இனி (4)-ன் உதவியால் θ-வின் மாறுதல்கள், ϕ-யில் ஏற்படுத்தும் விளைவுகளைக் காண்போம்.

θ	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
ϕ	0	α	0	$-\alpha$	0

இதிலிருந்து, θ ஆனது 0-ல் இருந்து π ஆக மாறும்போது, ϕ ஆனது 0-ல் இருந்து α ஆகி, மீண்டும் 0 ஆகிறது என்றும்; θ ஆனது π-ல் இருந்து 2π ஆக மாறும்போது, ϕ ஆனது 0-ல் இருந்து $-\alpha$ ஆகி, மீண்டும் 0 ஆகிறது என்றும் அறிகிறோம். இந்த வில்லானது வட்ட மையத்தில் தாங்கும் கோணம் 4α; (படத்தைப் பார்க்க). ஏனெனில் இதன் துருவமானது ஆதி என்றும், இதன் தொடக்கக்கோடு ஆதி வழி செல்லும் இவ் வட்டத்தின் விட்டம் என்றும் அறிவோம்.

பயிற்சி 6 (முதற்பாகம்)

1. z-தளத்தில் உள்ள கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளிகளை முறையே w-தளத்தில் உள்ள கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளிகளாக மாற்றும் மோபியஸ் மாற்றம் எது?

	z-தளப்புள்ளிகள்	w-தளப்புள்ளிகள்	விடை
1.	$1, -i, 2$	$0, 2, -i.$	$(2z-2) \div (z+iz-2)$
2.	$2, i, -2$	$1, i, -1.$	$(3z+2i) \div (iz+6)$
3.	$0, -i, -1$	$i, 1, 0.$	$-i\,(z+1)/(z-1)$
4.	$0, 1, i$	$\frac{1}{2}, 0, (1-3i)/5.$	$(1-z)/(2+z)$
5.	z_1, z_2, z_3	$0, 1, \infty$	$(z-z_1)(z_2-z_3)/(z-z_3(z_2-z_1)$
6.	$i, -i, 1$	$0, 1, \infty.$	$(1-i)(z-i)/2(z-1)$
7.	$-1, 1, \infty$	$(-1, i, 1.)$	$(iz+i-2)/(iz+i+2)$
8.	$\infty, i, 0$	$0, i, -\infty.$	$-1/z$
9.	$1+i, -i, 2-i$	$0, 1, i.$	$(2z-2-2i)/(iz-z-3-5i)$
10.	$-1, 1, \infty$	$-i, -1, i.$	$i\,(iz+i-2)/(iz+i+2)$

2 பின் வரும் மோபியஸ் மாற்றங்களால் மாருப் புள்ளிகளைக் கண்டுபிடி:-

(i) $w = \dfrac{z-1-i}{z+2}$ (ii) $w = \dfrac{6z-9}{z}$

(iii) $w = \dfrac{2z-5}{z+4}$ (iv) $w = \dfrac{z-1}{z+1}$

விடை. (i) $-1+i, -i$ (ii) 3 (iii) $-1\pm 2i$ (iv) $\pm i$.

3. ஒரு மோபியஸ் மாற்றத்தின் மாருப்புள்ளி $z=0$ ஆனால், அதை $w=az/(z+d)$ என எழுதலாம் என்றும், அதன் அடுத்த மாருப்புள்ளி $z=\infty$ ஆயின், அதை $w=az$ என எழுதலாம் என்றும் நிரூபி.

4. $z=0, \frac{1}{2}$- ஐ $w=1, 0$ ஆகவும், $|z-1|=1$ என்ற வட்டத்தை $|w|=1$ என்ற வட்டமாகவும் மாற்றும் மோபியஸ் மாற்றம் எது? விடை. $(1-2z)/(1+z)$.

5. $w = \dfrac{e^{\alpha}.z-i}{z-ie^{\alpha}}$ ... (α ஒரு மெய்யெண்) என்ற மாற்றத்தால் $y=0$ என்ற கோடானது, $(\cosh\alpha, 0)$-ஐ மையமாகவும், $\sinh\alpha$-ஐ ஆரமாகவும் கொண்ட வட்டமாக மாறுகிறது என நிரூபி.

6. $w = \dfrac{1+iz}{i+z}$ என்ற மாற்றமானது $z=-1$, $z=1$ என்பவைகளுக்கு கிடையில் உள்ள மெய்யச்சை w-தளத்தில் அரை வட்டமாக மாற்றுகிறது என நிரூபி.

7. $w = \dfrac{r(z-a)}{r^2-\bar{a}z}$ என்ற மாற்றமானது, $|z|=r$ என்ற வட்டத்தை $|w|=1$ என்ற வட்டமாக மாற்றுகிறது என நிரூபி. $|a|<r$ ஆனால், $|z|<r$ ஆனது $|w|<1$ ஆக மாறுகிறது என நிரூபி.

8. $\left|\dfrac{z-a}{z-b}\right| = \lambda$; வீச்சம் $\left(\dfrac{z-b}{z-a}\right) = \theta$

என்ற வளைவரைகள் (λ, θ-வின் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கு) ஒன்றையொன்று செங்குத்தாக வெட்டிக் கொள்கின்றன என நிரூபி.

9. பின் வரும் மாற்றங்களினால் கீழே கொடுக்கப்பட்ட பகுதிகள் எவ்வாறு மாறுகின்றன?

	மாற்றம் $w = f(z)$	கொடுக்கப்பட்ட z-தளத்தின் பகுதி	விடை
1.	$i(1+z)$	$x>0$	$v>0$.
2.	$1+iz$	$x>0;\ 0<y<2$.	$-1<u<1;\ v>0$.
3.	z^2	$x^2-y^2=-2;\ xy=1;$ $x^2-y^2=2;\ xy=-1$.	$u=-2;\ v=2$. $u=2;\ v=-2$.
4.	$1/z$	$0<y<1/2c$	$u^2+(v+c)^2>c^2,\ v<0$.
5.	i/z	$x\geq 0;\ 0\leq y\leq 1$	$0\leq\phi\leq\pi/2,\ \rho\geq\cos\phi$.
6.	$(z-1)/(z+1)$	$0\leq x<1$	$\lvert w\rvert=1$.
7.	$(i-z)/(i+z)$	(i) $\lvert z\rvert<1$ (ii) $y\geq 0$	(i) $u>0$. (ii) $\lvert w\rvert\leq 1$.
8.	$i(1-z)/(1+z)$	$\lvert z\rvert\leq 1$	$v\geq 0$.
9.	$z+(1/z)$	$\lvert z\rvert=1$	$-2\leq u\leq 2;\ v=0$.
10.	$\sin^2 z$	$0\leq x\leq\pi/2;\ y>0$	$v\geq 0$.
11.	$(\sin z)^{\frac{1}{4}}$	$-\pi/2\leq x\leq\pi/2;\ y\geq 0$	முதல் கால் பகுதியில் $u=v,\ v=0$ என்ற கோடுகளின் இடையே உள்ள பகுதி
12.	$\sqrt{z}$	$\lvert z-1\rvert=c$	$\lvert w-1\rvert\,.\,\lvert w+1\rvert=k$.
13.	$(iz+1)/(z+i)$	$\lvert z\rvert\leq 1$	$v\leq 0$.
14.	$(z+3)/(z-4)$	$x^2+y^2=4x$	$4u+3=0$.
15.	$\frac{1}{2}\log\dfrac{1+z}{1-z}$	$\lvert z\rvert<1$	$-\pi/4<v<\pi/4$.

10. $w=(z-i)/(z+i)$ என்ற மாற்றத்தால் (i) $\lvert z+i\rvert\leq r$ என்ற பகுதி $\lvert w-1\rvert\geq 2/r$ என்ற பகுதிக்கு இசைவாகவும் (ii) $\lvert z+i\rvert<2;\ x>0, y>0$ என்ற பகுதியானது, மெய்யச்சின் கீழ்ப்பாதியான Ou', $\lvert w-1\rvert=1$, $\lvert w\rvert=1$ ஆகியவற்றால் அடைபட்ட பகுதிக்கு இசைவாகவும் உள்ளது என நிறுவி.

11. $w = k\ (z-b)/(z-a) \ldots (k$ ஒரு மெய்யெண்) என்ற மாற்றமானது z-தளத்தில் 3 வட்டவில்களால் அடைபட்ட பகுதியை w-தளத்தில் ஒரு முக்கோணமாக மாற்றும் என நிரூபி.

12. $|z| = 1$ என்ற வட்டத்தின் வெளிப்புறத்தை $u \geq 0$ என மாற்றும் மோபியஸ் மாற்றத்தை, $z = 1, -i, -1$ ஆகியவை $w = i, 0, -i$ என மாறும் வண்ணம் கண்டுபிடி. (i) வீச்சம் $(z) = \alpha$; $|z| \geq 1$ என்ற கோடுகளின் பிம்பங்களையும் (ii) $|z| = r,\ r > 1$ என்ற பொதுமைய வட்டங்களின் பிம்பங்களையும் கண்டுபிடி.
விடை. $(z+i)/(z-i)$; $u^2+v^2-1+\lambda v = 0$; $|w+1| = r\,|w-1|$.

13. $|z-z_1| = r_1$ என்ற வட்டம், $|z-z_2| = r_2$ என்ற வட்டத்தின் உட்புறம் உள்ளது $z_1 \neq z_2$. $z=a$, $z=b$ என்பவை இவ்வட்டங்களால் நிர்ணயிக்கப்பட்ட பொது அச்சுள்ள வட்டங்களின் எல்லைப் புள்ளிகளானால், $w = k\,(z-b)/(z-a)$ என்ற மாற்றமானது இந்தப் பொது அச்சு வட்டங்களை ஆதியை மையமாகக் கொண்ட பொது மைய வட்டங்களாக மாற்றுகிறது என நிரூபி. (k ஒரு மெய்யெண்)

14. $w = \dfrac{i\,(z+ic)^2 - (z-ic)^2}{i\,(z+ic)^2 + (z-ic)^2}$ என்ற மாற்றமானது $|z| = 1$ என்ற (y-அச்சுக்கு) வலப்புறமுள்ள அரை வட்ட பகுதியை $|w| = 1$ என்ற வட்டத்தின் உட்புறமாக மாற்றுகிறது என நிரூபி.

15. $w = \log\{(z-1)/(z+1)\}$ என்ற மாற்றம் தரப்பட்டுள்ளது. w-தளத்தில் உள்ள (c, d-யின் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கு) $u=c$; $v=d$ என்ற இணைக்கோடுகள் z-தளத்தில் உள்ள பொது அச்சுள்ள (coaxial) வட்டங்களின் பிம்பங்களாகும் என நிரூபி.

16. $w\,(z+i)^2 = 1$ என்ற மாற்றமானது, z-தளத்திலுள்ள $|z| = 1$ என்ற வட்டத்தின் உட்புறத்தை, w-தளத்தில் $\dfrac{1}{\rho} = 2\,(1-\cos\phi)$ என்ற பரவளையத்தின் வெளிப்புறமாக மாற்றுகிறது என நிரூபி.

17. c என்பது ஒரு மெய்யெண். பின்வரும் மாற்றங்கள்

(i) $w = \left(\dfrac{z+c}{z-c}\right)^2$ (ii) $w = \left(\dfrac{z-ic}{z+ic}\right)^2$

z-தளத்தின் எப்பகுதியை w-தளத்தின் மேல் பாதியாக மாற்றுகின்றன? $|z| = c$-ன் (i) மேல் (ii) வலது பகுதி.

18. $|z+\sqrt{z^2-c^2}| + |z-\sqrt{z^2-c^2}| = |z+c| + |z-c|$

என நிரூபி. $z^2+2wz\cos\lambda+w^2=1$ ஆனுல், z-ஆனது குவியப் புள்ளிகளைக் கிளைப்புள்ளிகளாகக் கொண்ட நீள் வட்டத்தை வரையும் போது, w-ஆனது குவியப் புள்ளிகளைக் கிளைப்புள்ளி களாகக் கொண்ட நீள் வட்டத்தை வரையும் என நிரூபி.

19. $w=\left(\dfrac{z+i}{z-i}+1\right)^2$ என்ற மாற்றமானது, z-தளத்தின் மெய்யச்சை, w-தளத்தில் $\rho=2+2\cos\phi$ என்ற கார்டியாய்டு ஆக மாற்றுகிறது என நிரூபி. கார்டியாய்டின் உட்புறம் z-தளத்தின் கீழ் பாதிக்கு இசைவானது என்றும் நிரூபி.

20. $\dfrac{z}{c}=\left(\dfrac{1+w}{1-w}\right)^{2a/\pi i}$ என்ற மாற்றமானது, $|w|=1$ என்ற வட்டத்தின் உட்புறத்தை (1, -1-ஐ மையமாகக் கொண்ட இரு சிறு அரை வட்டப் பிளவுகள் நீங்கலாக) z-தளத்தில் ce^a, ce^{-a}-ஐ ஆரங்களாகக் கொண்ட வட்டங்களுக்கிடையே உள்ள பகுதியாக மாற்றுகிறது என நிரூபி. இப்பொழுது, z-தளத்தில் உள்ள ஒரே பிளவு மெய்யச்சில் முதல் காற்பகுதியில் இருக்கும் என்றும் நிரூபி.

21. $w=i\cosh\dfrac{\pi\sqrt{z}}{2c}$ என்ற மாற்றமானது, $y^2=4c^2(x+c^2)$ என்ற பரவளையத்தின் உட்புறத்தை w-தளத்தின் மேல் பாதியாக மாற்றுகிறது என நிரூபி.

22. (i) $w=\tanh z$ என்ற மாற்றமானது $x=$மாறிலி, $y=$மாறிலி என்ற கோடுகளைப் பொது அச்சுள்ள வட்டங்களாக மாற்றுகிறது என நிரூபி.

(ii) $w=\tanh^{-1}z$ என்ற மாற்றமானது z-தளத்தின் மேல் பாதியை $0<v<\pi/2$ ஆக மாற்றுகிறது என நிரூபி.

23. $w^2=1+e^z$ என்ற மாற்றமானது, $x=$மாறிலி என்ற கோடுகளைப் பொதுக் குவியமுள்ள லெம்னிஸ்கேட்டுகளாக மாற்றுகிறது என நிரூபி.

24. c ஒரு மெய்யெண். $\dfrac{z-c}{z+c}=i\,e^{iw}$ என்ற மாற்றமானது $v=-\infty$, $v=\infty$, $u=0$, $u=\pi$ என்ற துண்டத்தை $|z|\le c$ என்ற வட்டமாக மாற்றுகிறது என நிரூபி.

25. w-தளத்திலுள்ள $v=0$, $v=\infty$, $u=\pi$, $u=-\pi$ என்ற துண்டினுடைய பிம்பத்தை $iw=\log\left(\sqrt{\frac{z}{a}}-1\right)$ என்ற மாற்றத்தால் பெறும் போது z-தளத்தில் $r=2a\,(1+\cos\theta)$ என்ற கார்டியாய்டு கிடைக்கிறது என நிரூபி. இப்பொழுது (cusp) பிறை முனையில் இருந்து $x=a$ வரை ஒரு பிளவு உண்டெனவும் நிரூபி.

26. $w^2=(z-\alpha)\,(z-\beta)$ என்ற மாற்றத்தின் வகைக்கெழு பூச்சியப் புள்ளிகள் (critical points) $z=\alpha,\beta,\ (\alpha+\beta)/2;$ $w=0,\ \pm i\,(\alpha-\beta)/2$ என நிரூபி.

27. $|z|=1$, $-\pi/2\le$ வீச்சம் $z\le\pi/2$ என்ற அரை வட்டத்தின் பிம்பத்தை $w=\dfrac{4}{(z+1)^2}$ என்ற மாற்றம் மூலம் பெற்றால், பிம்ப வில்லின் நீளம் $2\sqrt{2}+2\log(1+\sqrt{2})$ என நிரூபி.)

28. $w=\dfrac{az+b}{z-c}$ என்ற மாற்றத்தால் $|z|=1$ என்ற வட்டத்தின் பிம்பம் மற்றோர் வட்டமாகும். $|c|=1$ ஆனால் இப்பிம்பம் ஒரு நேர்கோடாகும்.

29. $z=\left(\dfrac{w+1}{w-1}\right)^2$ என்ற மாற்றத்தினால் z-தளத்திலுள்ள y-அச்சின் பிம்பமானது $|w+i|=\sqrt{2}$, $|w-i|=\sqrt{2}$ என்ற வட்டங்களாகும் என நிரூபி.

30. $|z-1|=\sqrt{2}$, $|z+1|=\sqrt{2}$ என்ற வட்டங்களின் சிறு வில்களால் ஆதியைச் சுற்றியுள்ள பகுதியை $w=2z/(1-z^2)$ என்ற மாற்றமானது $|w|<1$ ஆக மாற்றுகிறது என நிரூபி.

31. $w=e^{\pi z/a}$ என்ற மாற்றமானது, w-தளத்திலுள்ள சமகோணச் சுருளியை (equiangular spiral), z-தளத்தில் உள்ள நேர்கோடாக மாற்றுகிறது என நிரூபி.

32. a, b என்பவை மெய்யெண்கள்.
$(a-b)\,w^2-2wz+a+b=0$ என்ற மாற்றத்தால், w-தளத்தில் உள்ள ஆதிமைய வட்டங்கள், ஆதிவழி செல்லும் கோடுகள் ஆகியவை முறையே பொது அச்சுள்ள நீள், அதிபர வளையங்களாக மாறுகின்றன என நிரூபி.

33. $\zeta=\sqrt{z}$, $t=\sin(\pi\zeta/2)$, $w=(t-1)/(t+1)$ என்பவைகளாலான $w=\dfrac{\sin(\pi\sqrt{z}/2)-1}{\sin(\pi\sqrt{z}/2)+1}$ என்ற மாற்றமானது, z-தளத்திலுள்ள $2/(1+\cos\theta)=r$ என்ற பரவளையத்தின் உட்புறத்தை $|w|=1$ என மாற்றுகிறது என்று நிரூபி. இதில் $z=0$-ல் இருந்து $-\infty$ வரை பிளவு உண்டென்றும், $w=0$-ல் இருந்து 1 வரை பிளவு உண்டென்றும் நிரூபி.

34. $w=\cos z$ என்ற மாற்றமானது $0<x<\pi$ என்ற துண்டத்தை w-தளத்தின் முழுமையாக மாற்றுகிறது என நிரூபி. இதில் w-தள மெய்யச்சில் $-\infty$-ல் இருந்து -1 வரையிலும், பின்னர் 1-ல் இருந்து ∞ வரையிலும் பிளவு உண்டு என நிரூபி.

35. $w=\dfrac{c}{2}\left(\dfrac{z-a}{z+a}+\dfrac{z+a}{z-a}\right)$ என்ற மாற்றமானது பொது அச்சுள்ள வட்டங்களைப் பொதுக் குவியமுள்ள நீள் (அதிபர) வளையங்களாக மாற்றுகிறது என நிரூபி.

$|(z-a)/(z+a)|=\frac{1}{2}$ என்ற வட்டத்தின் உட்புறத்திற்கு இசைந்த பகுதி $\dfrac{16u^2}{25c^2}+\dfrac{16v^2}{9c^2}=1$ என்ற நீள் வட்டத்தின் வெளிப்புறம் என நிரூபி.

36. $w=-\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$ என்ற மாற்றமானது,

$|z|\leq 1$ என்ற வட்டத்தின் மேல்பாதியை w-தளத்தின் மேல் பாதியாக மாற்றுகிறது என நிரூபி. இதில் எப்புள்ளிகளில் உருப்பெருக்க அளவு 1/2 ஆக உள்ளது? எப்புள்ளிகளில் சுழற்சியானது $\pm\pi/2$ ஆக உள்ளது? $3|z|^2=1$ என்ற அரை வட்டத்தின் உட்பகுதியில் எல்லாப் புள்ளிகளிலும் உருப்பெருக்கம் 1-ஐ விட அதிகமானது என நிரூபி.

37. $w=z+1/z$ என்ற மாற்றமானது (i) $|z|=1$ என்ற மேல் அரை வட்டத்தின் உட்பகுதியை w-தளத்தின் கீழ்ப்பகுதியாக மாற்றுகிறது என நிரூபி. (ii) $|z|=1$, $|z|=k\ (>1)$ என்ற மேல் அரை வட்டங்களுக்கிடையே உள்ள பகுதி w-தளத்தின் மேல் பாதியிலுள்ள

$$\left(\frac{ku}{k^2+1}\right)^2+\left(\frac{kv}{k^2-1}\right)^2=1$$

என்ற நீள்வளையத்தின் பாதியாக மாறுகிறதென நிரூபி.

38. $|z-2|+|z+2|=100/7$ என்ற நீள்வளையத்தின் வெளிப்புறத்தை $|w|\leq 1$ என மாற்றும் உருமாற்றம் எது?

விடை. $z=\dfrac{w}{7}+\dfrac{7}{w}$

39. $1, 2, 1+i, 2+i$ என்பவைகளை உச்சிப் புள்ளிகளாகக் கொண்ட சதுரத்தின் பிம்பங்களை

(i) $w=2z+5-3i$ (ii) $w=z^2$ (iii) $w=\sin \pi z$ என்ற உருமாற்றங்களில் கண்டுபிடி. ஒவ்வொரு மாற்றத்தின் பின்னும் கோணங்கள் மாறவில்லை என்பதைச் சரிபார்.

40. பின்வரும் மாற்றங்களை $w=f(z, \bar{z})$ என எழுதுக:—

(i) $u=4x^2-8y;\quad v=8x-4y^2$

விடை. $w=(1+i)(z^2+\bar{z}^2)$

(ii) $u=x^3-3xy^2;\quad v=3x^2y-y^3$

விடை. $w=z^3$

6·26. சுவார்ட்ஸ் கிறிஸ்டோஃபல் உருமாற்றம்

$$w=f(z)=$$

$$A\int_{z_0}^{z}(t-x_1)^{-k_1}\,(t-x_2)^{-k_2}\,\ldots\,(t-x_{n-1})^{-k_{n-1}}\,dt+B \quad \ldots(1)$$

என்பது சுவார்ட்ஸ் கிறிஸ்டோஃபல் உருமாற்றம் ஆகும். இதில் A, B என்பவைகள் கலப்பெண் மாறிலிகள் ஆகும். மேலும் $I(z_0)\geq 0$ ஆகும். $x_1, x_2, \ldots x_{n-1};\ k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$ என்ற மெய்யெண்கள்

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n\,(=\infty) \quad \ldots\ (2)$$

$$-1 < k_r < 1 \qquad r=1, 2, \ldots, n-1 \quad \ldots\ (3)$$

என்பதற்கிணங்க இருக்கும். இம்மாற்றத்தினால் $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \infty$ என்ற புள்ளிகள் $w_1, w_2 \ldots w_n$ என்ற பல கோணத்தின் உச்சிப்புள்ளிகளாக மாறும். மேலும் இப்பல கோணத்தின் உட்புறம். z-தளத்தின் மேல் பாதிக்கு இசைவாக இருக்கும்.

6·27. $f(-\infty)=w_0$ ஆகவும், $f(z)$ ஆனது தொடர்புடைச் சார்பாகவும் இருந்தால், z ஆனது x-அச்சில் $-\infty$-யிலிருந்து, $+\infty$ வரை செல்ல w ஆனது $w_0, w_1, w_2, \ldots$ என்ற பல கோணத்தை வரையும்.

$$f'(z) = A(z-x_1)^{-k_1}(z-x_2)^{-k_2}\ldots(z-x_{n-1})^{-k_{n-1}} \quad \ldots \quad (4)$$

$$\therefore \quad \text{வீச்சம்}\, f'(z) = \text{வீச்சம்}\, A - k_1\, \text{வீச்சம்}\,(z-x_1)$$

$$-k_2\, \text{வீச்சம்}\,(z-k_2) - \ldots - k_{n-1}\, \text{வீச்சம்}\,(z-x_{n-1}) \ldots (5)$$

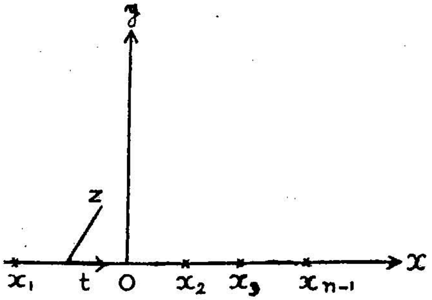
இப்பொழுது, x—அச்சின் வழியாக z செல்கிறது. எனவே அதன் தொடுகோட்டின் வீச்சம் $=0$. அதன் அலகு தொடுகோட்டு வெக்டர் t ஆனால் வீச்சம் $t=0$.

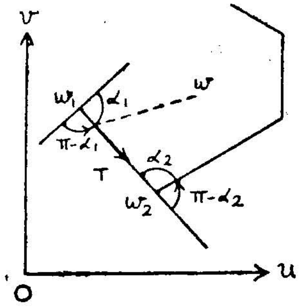
இனி T என்பது w-வளைகோட்டின் அலகு தொடுகோடானால்

$$\text{வீச்சம்}\, T = \text{வீச்சம்}\, t + \text{வீச்சம்}\, f'(z_0) \quad \ldots \quad (6)$$

என அறிவோம். ஆனால் வீச்சம் $t=0$

$$\therefore \quad \text{வீச்சம்}\, T = \text{வீச்சம்}\, f'(z_0) \quad \ldots \quad (6)$$





படம் 44.

இப்பொழுது $z=x$ ஆகவும், $x < x_1$ ஆகவும் இருந்தால் வீச்சம் $z-x_1 =$ வீச்சம் $z-x_2 = \ldots =$ வீச்சம் $z-x_{n-1} = \pi$. ஆனால் $x_1 < x < x_2$ ஆகவும், $z=x$ ஆகவும் இருந்தால் வீச்சம் $z-x_1=0$ ஆகவும், மற்ற வீச்சங்கள் π ஆகவும் இருக்கும். $\therefore$ z ஆனது x_1-ஐக் கடக்கும்போது $f'(z)$-ன் வீச்சத்தின் மதிப்பு $k_1\pi$ அளவு திடீரென அதிகரிக்கிறது.

பின்பு z ஆனது x_1-ல் இருந்து x_2-வுக்குப் போகும்போது, $f'(z_0)$-ன் வீச்சத்தில் மாற்றமே இல்லை. $\therefore$ w ஆனது $w_1 w_2$ என்ற நேர்கோட்டை வரைகிறது. கடைசியாக, w_2-ல் அதன் வீச்சம் $k_2\pi$ அளவு திடீரென மாறும். ஆனுல் $f(z)$ தொடர்புடைச் சார்பாதலின் x_2-ன் பிம்பம் w_2 என்ற உச்சிப்புள்ளி ஆகும்.

6·28. w_0, w_1-ஐ இணைக்கும் கோட்டை L_1 என்றும்; w_1, w_2-ஐ இணைக்கும் கோட்டை L_2 என்றும்; w_{r-1} w_r-ஐ இணைக்கும் கோட்டை L_r என்றும் சொல்வோம். $\phi_{r,r+1}$ என்பது L_r, L_{r+1} என்னும் கோடுகளுக்கிடையே உள்ள கோணம் ஆனுல் $\phi_{r,r+1} = k_r\pi$ ஆகும்.

ϕ_r என்பது L_r என்ற கோடு u அச்சுடன் உண்டாக்கும் கோணம் ஆனுல்

$$\begin{aligned}\phi_{r,r+1} &= \phi_{r+1} - \phi_r \\ &= [\text{வீச்சம் } A-(k_{r+1} + k_{r+2} + \dots + k_{n-1})\pi] \\ &\quad -[\text{வீச்சம் } A-(k_r + k_{r+1} + \dots + k_{n-1})\pi] \\ &= k_r\pi\end{aligned}$$

குறிப்பு 1: $\phi_{r,r+1}$ என்பது L_r, L_{r+1} என்ற கோடுகளுக்கிடையே உள்ள, பல கோணத்தின் வெளிப்புற கோணமாகும். ஆனுல் வெளிப்புற கோணங்களின் கூடுதல் 2 நேர்கோணம்.

$$\therefore \phi_{1,2}+\phi_{2,3} + \dots + \phi_{n-1,n} + \phi_{n,0} = 2\pi.$$

$\phi_{n,0}$ என்பது w_0-ல் உள்ள வெளிப்புறகோணம் என்பது தெளிவு.

$$\begin{aligned}\therefore\quad \phi_{n,0} &= \pi\,[2-(k_1+k_2+\dots+k_{n-1})] \\ &= k_n\pi \text{ என வரையறை செய்வோம்.}\end{aligned}$$

எனவே, $k_n = 2-(k_1+k_2+\dots+k_{n-1})$

அல்லது $k_1+k_2+\dots+k_n = 2.$

குறிப்பு: 2 $\phi_{n,0} = 0$ ஆனுல் w_{n-1}-ஐ w_1 உடன் இணைக்கும் கோட்டில் w_0 இருக்க வேண்டும். அதாவது, w_0-உம் பல கோணத்தின் L_{n-1}-ன் ஒரு பகுதியில்தான் இருக்க வேண்டும். $\therefore$ இப் பலகோணத்தின் உச்சிப்புள்ளிகள் $(n-1)$ தான்.

குறிப்பு: 3. வெளிப்புறக் கோணத்தை $-\pi$-க்கும், π-க்கும் இடையே உள்ளவாறு கணிக்கலாம். எனவே $-1 < k_r < 1$ என்ற நிபந்தனையின் விளக்கம் காண்க.

குறிப்பு: 4. பலகோணத்தின் உட்கோணங்கள் $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ஆனுல்

$$(\pi-\alpha_1)+(\pi-\alpha_2)+\ldots+(\pi-\alpha_n) = 2\pi$$

$$\therefore \quad \frac{\pi-\alpha_1}{\pi}+\frac{\pi-\alpha_2}{\pi}+\ldots+\frac{\pi-\alpha_n}{\pi} = 2$$

$\therefore \quad k_r = (\pi-\alpha_r)/\pi$ ஆகும்.

$$\alpha_r+\phi_{r,r+1} = \alpha_r+k_r\pi$$

$$= \alpha_r+\frac{(\pi-\alpha_r)}{\pi}\pi = \pi$$

என்பதைக் கவனி.

6·29. இனி, பலகோணத்தின் உட்புறத்தை அலகு வட்டமாக மாற்ற இயலும் என்றும், அலகு வட்டத்தை z-தளத்தின் மேல்பகுதியாக மாற்ற முடியும் என்றும் நிரூபித்தால் போதுமானது.

முதலாவது, z-தளத்திலுள்ள C என்ற அலகு வட்டத்தை w-தளத்திலுள்ள P என்ற பலகோணமாக $w=f(z)$ மாற்றுகிறது என நிரூபிப்போம்.

இதற்கு, P-யின் உட்பகுதியான D-யில் உள்ள a ஆனது C-யினுள் உள்ள ஒரே ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளி α_0-க்கு இணங்க இருக்கும் என நிரூபிப்போம். அதாவது $f(\alpha_0)=a$ என்பதற்கிசைய ஒரே ஒரு புள்ளி α_0 தான் இருக்கும் என நிரூபிப்போம்.

a ஆனது P-யின் உட்புறம் உள்ளது. $\therefore$ காஷியின் தொகையீட்டு விதிப்படி

$$\frac{1}{2\pi i}\int_P \frac{dw}{w-a} = 1$$

மேலும், $w-a = f(z)-a$ ஆனதால்

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)\,dz}{f(z)-a} = 1$$

ஆனல் $f(z)-a$ ஆனது C-யினுள் பகுமுறைச் சார்பாகும். ∴ வீச்சத் தேற்றத்தின்படி $\{f(z)-a\}$-க்கு ஒரே ஒரு பூச்சியம் தான் உண்டு. அதை α_0 எனக் கொண்டால் $f(\alpha_0)=a$ ஆகும்.

6·30. கடைசியாக, w-ல் உள்ள அலகு வட்டத்தை மேல் பாதி z-தளமாக மாற்றுவது எங்ஙனம் எனப் பார்ப்போம்.

z, z_0 என்பவை z தளத்தின் மேல்பாதியில் இருக்கட்டும்.

$$w = e^{i\theta}\left\{\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}\right\}$$

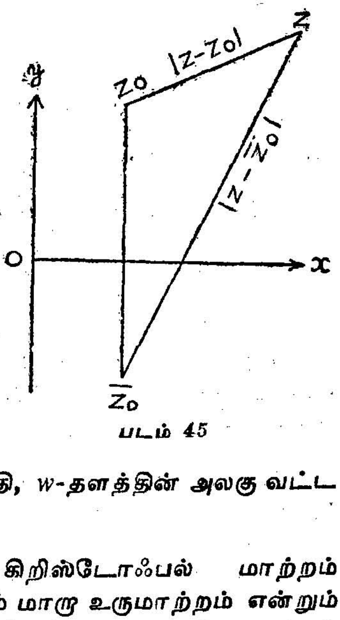
என்ற உருமாற்றத்தைக் கவனி.

$$|w| = \left| e^{i\theta_0}\left(\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}\right)\right|$$

$$= \left|\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}\right|$$

z, z_0 என்பவை மேல்தளத்தில் இருப்பதால் $|z-z_0| < |z-\bar{z}_0|$ ஆக இருக்க வேண்டும்.

$$\therefore \quad |w| \le 1$$



படம் 45

அதாவது, z-தளத்தின் மேல்பாதி, w-தளத்தின் அலகு வட்டமாக மாறுகிறது.

6·31. ஆகவே, சுவார்ட்ஸ் கிறிஸ்டோஃபல் மாற்றம் தொடர்ச்சியுள்ளதென்றும் கோணம் மாறு உருமாற்றம் என்றும் பார்த்தோம். $x_1, x_2, \ldots, x_n$ புள்ளிகளில் மட்டும் கோணங்கள் திடீரென மாறுவதைக் கவனி. பல கோணத்தின் பக்கங்கள் ஒன்றையொன்று குறுக்கிடாவிட்டால் இது அடைத்த பல கோணமாக இருக்கும் என்பது தெளிவு. z ஆனது x-அச்சில் செல்ல, w-ஆனது பலகோணத்தின் வழிச் செல்லும்.

P என்ற பலகோணம் கொடுக்கப்பட்டால், அதை x-அச்சாக மாற்ற எத்தனை மாறிலிகளை நாம் கண்டுபிடிக்க வேண்டும்?

A ஆனது பலகோணத்தின் உருவத்தைப் பெருக்கும் என்றும், B இடப்பெயர்ச்சிக்குக் காரணமாயிருக்கும் என்றும் அறிவோம்.

ஆகவே $z_0=0$, $A=1$, $B=0$ என்று போட்டால் கிடைக்கும் பல கோணமான P' ஆனது கொடுக்கப்பட்ட பல கோணமான P-க்கு வடிவொத்ததாக இருக்கும் என்பது தெளிவு.

$k_1, k_2, \ldots, k_n$ என்ற அடுக்குக் குறிகள் பலகோணத்தின் உட்கோணங்களான $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$-ஐப் பொறுத்து இருக்கும் என்று பார்த்தோம்.

கடைசியாக, $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$-ஐக் கண்டுபிடிப்பது எங்ஙனம்?

x-அச்சின் பிம்பம் P-க்கு வடிவொத்த P' ஆனுல், P'-ன் $(n-2)$ பக்கங்களின் விகிதம் P-ன் பக்கங்களின் விகிதத்திற்கு இசைய இருக்க வேண்டும். இதற்கு $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ என்ற $n-1$ மாறிலிகளைக் கொண்டு $(n-3)$ சமன்பாடுகள் தேவைப்படும். ஆகவே. $x_1, \ldots x_{n-1}$ என்பவற்றில் ஏதாவது இரண்டினை நம் விருப்பப்படி எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

குறிப்பு: x_n ஆக முடிவிலியை விடுத்து ஒரு முடிவுள்ள (finite) புள்ளியை எடுத்துக்கொண்டால் நம் விருப்பப்படி ஏதேனும் மூன்று புள்ளிகளை எடுத்துக்கொள்ளலாம்.

6·32 w-தளத்தில் ஆதியில் u-அச்சுடன் $\pi/6$ கோணத்தை உண்டாக்கும் ஆரைச் சிறையை z-தளத்தில் மேல்பாதியாக மாற்றுக.

w-தளத்தில் ஆதி என்ற ஒரே ஒரு உச்சிப் புள்ளிதான் உண்டு என்றும், அதன் உட்கோணம் $\pi/6$ என்றும் நோக்குக.

இந்த உச்சிப்புள்ளியை, x-அச்சில் நாம் விரும்பும் புள்ளியாக மாற்றலாம். அதை $x=a$ எனக் கொள்வோம்.

$$\frac{dw}{dz} = A\,(z-a)^{-k_1}$$

$$\text{ஆனுல் } k_1 = \frac{\pi-\alpha_1}{\pi} = \frac{\pi-\pi/6}{\pi} = 5/6$$

$$\therefore \frac{dw}{dz} = A\,(z-a)^{-5/6}$$

$$\therefore w = \frac{A\,(z-a)^{1/6}}{\frac{1}{6}} + B$$

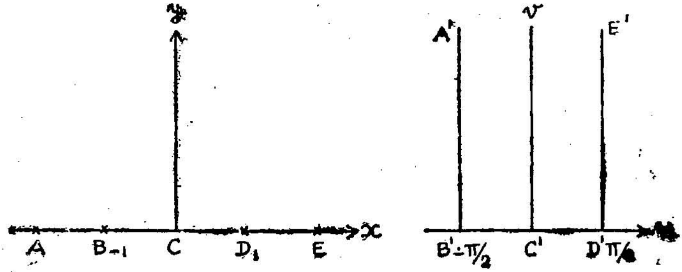
$z=a$ ஆனுல் $w=0$. $\therefore$ $B=0$.

மேலும், $w=1$ என்பது $z=a+1$ ஆக மாறுகிறது எனக் கொண்டால்,

$$1 = 6A\times 1^{1/6} \quad \therefore \quad 6A=1.$$

$\therefore \; w = (z-a)^{1/6}$ என்பது தேவையான உருமாற்றமாகும்.

6·33. *w-தளத்தின் மேல்பகுதியில் $\pm \pi/2$-க்கு இடையே உள்ள பகுதியை z-தளத்தின் மேல்பாதியாக மாற்றுக.*



படம் 46

w-தளத்தில் உள்ள பகுதியை, ∞-ல் உச்சிப் புள்ளியைக் கொண்ட $\infty B' D'$ என்ற $\triangle$ ஆகக் கருதலாம். இதன் உட் கோணங்கள் $\pi/2$, $\pi/2$, 0 ஆகும்.

இனி, B'-ஐ x-அச்சில் -1 ஆகவும், D'-ஐ x-அச்சில் 1 ஆகவும் மாற்றுவதாகக் கொண்டால்,

$$\frac{dw}{dz} = A\,(z-1)^{-1/2}\,(z+1)^{-1/2} \text{ ஆகும்.}$$

$$\because \; k_1 = \frac{\pi-\pi/2}{\pi} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \; \frac{dw}{dz} = \frac{A}{\sqrt{z^2-1}} = \frac{A}{i\sqrt{1-z^2}} = \frac{-iA}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$\therefore \quad w = -\,i\,A\sin^{-1}(z) + B \text{ ஆகும்.}$$

$z = 1$ ஆனால் $w=\pi/2$; $z=-1$ ஆனால் $w = -\pi/2$

$$\therefore \; \pi/2 = -iA\,\pi/2 + B$$

$$-\pi/2 = iA\,\pi/2 + B$$

$$\therefore \quad 0 = 2B; \quad -iA = 1.$$

$$\therefore \quad w = \sin^{-1} z.$$

6·34. 6·32.-ல் ஓர் உச்சி கொண்ட முக்கோணத்தையும்; 6·33-ல் இரு உச்சிகள் கொண்ட முக்கோணத்தையும் z தளத்தின் மேல் பாதியாக மாற்றினோம். பொதுவாக $w_1\, w_2\, w_3$ என்ற முக்கோணத்தை மாற்ற

$$w = A \int_{z_0}^{z} (t-x_1)^{-k_1} (t-x_2)^{-k_2} (t-x_3)^{-k_3}\, dt + B$$

என்பதைப் பயன்படுத்த வேண்டும். இதில்

$k_1+k_2+k_3 = 2$ என்றும்

$k_r = \dfrac{\pi-\alpha_r}{\pi}$ என்றும் அறிவோம்.

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ முக்கோணத்தின் உட்கோணங்களாம்.

இதில் w_3-ன் பிம்பம் ∞ எனக் கொண்டால்

$$w = A \int_{z_0}^{z} (t-x_1)^{-k_1} (t-x_2)^{-k_2}\, dt + B$$

என இதைச் சுருக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு: w-தளத்தில் உள்ள $(\sqrt{3}, 3)$; $(0,0)$: $(0, 2\sqrt{3})$ என்ற சமபக்க முக்கோணத்தை z-தளத்தின் மேல் பாதியாக மாற்றுக.

இதில் $k_1 = k_2 = k_3 = \dfrac{\pi-\pi/3}{\pi} = 2/3.$

நாம் x_1, x_2, x_3-ஐ $-1, 1, \infty$ ஆகக் கொள்வோம்.

மேலும் $z_0 = 1$, $A = 1$, $B = 0$ ஆனால்

$$w = \int_{1}^{z} (t+1)^{-2/3} (t-1)^{-2/3}\, dt \text{ ஆகும்.}$$

இதில் $z = 1$ ஆனால் $w = 0$ என்பது தெளிவு.

அதாவது, $x = 1$ என்பது w-தளத்திலுள்ள $(0,0)$-ன் பிம்பம்.

இனி $z = -1$ எனக்கொள்வோம். (இதை நம் விருப்பப்படி எடுத்துக்கொள்ளலாம்).

$-1 < x < 1$ ஆனதால் w_1-ஐ $(\sqrt{3}, 3)$ ஆகவும், w_2-ஐ $(0,0)$ ஆகவும், w_3-ஐ $(0, 2\sqrt{3})$ ஆகவும் கொள்ளல் முறையாகும் (ஏனெனில் இவை $-1, 1, \infty$ என்பவைகளின் பிம்பங்களாகும்).

இப்பொழுது $-1<x<1$ ஆனல்

$x+1>0$, வீச்சம் $x+1=0$, $|x-1| = 1-x$; வீச்சம் $x-1=\pi$.

$$\therefore \quad w_{(-1)} = \int_1^{-1} (x+1)^{-2/3} \exp\left(-\frac{2\pi i}{3}\right)(1-x)^{-2/3}\, dx$$

$$= \exp\left(\frac{\pi i}{3}\right) \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(1-x^2)^{2/3}}$$

$$= \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot 2\sqrt{3}$$

$$= \sqrt{3} + i3$$

$2\sqrt{3}$ ஆனது சமபக்க முக்கோணத்தின் பக்கம் என்பது தெளிவு.

கடைசியாக $z=\infty$ ஆனல்

$$w_{\infty} = \int_1^{\infty} (x+1)^{-2/3} (x-1)^{-2/3}\, dx = \int_1^{\infty} \frac{dx}{(x^2-1)^{2/3}} \quad \ldots (1)$$

இதை $z=-\infty$ எனவும் போடலாம்! (ஏனெனில் z-ஆனது முடிவிலியை x-அச்சின் எதிர்ப்பக்கமாக அணுகுகிறது எனக் கொள்ளலாம்)

$$\therefore \quad w_{\infty} = \int_1^{-\infty} (x+1)^{-2/3} (x-1)^{-2/3}\, dx.$$

$$= w_{(-1)} + \exp\left(\frac{-4\pi i}{3}\right) \int_{-1}^{-\infty} (|x+1| \cdot |x-1|)^{-2/3}\, dx$$

$$= (\sqrt{3}+i3) + \exp\left(\frac{-\pi i}{3}\right) \int_1^{\infty} \frac{dx}{(x^2-1)^{2/3}}$$

$$= (\sqrt{3}+i3) + \exp\left(\frac{-\pi i}{3}\right) w_{\infty}$$

$$\therefore \quad w_{\infty}\left[1-\exp\left(-\frac{\pi i}{3}\right)\right] = \sqrt{3}+i3$$

$$w_{\infty}\left[1-\left(\tfrac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\right] = \sqrt{3}+i3$$

$$w_{\infty}\left(\tfrac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}\,(1+i\sqrt{3})$$

$$\therefore \quad w_{\infty} = 2\sqrt{3}$$

$\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$-ஐ $(z-1)$-ன் அடுக்குகளாக விரித்தால்

$$w-1 = \tfrac{1}{2}\left[(z-1)^2-(z-1)^3+(z-1)^4-\ldots\right]$$

∴ (1)-ல் இருந்து $z=1$-ல் உள்ள உச்சிக் கோணங்கள் w-தளத்தில் இரு மடங்காகும். $z=1$-ல் C-க்கு வெளியே உள்ள கோணம் π ஆதலின் C-யின் பிம்பமான C'-ல் $z=1$-ன் பிம்பமான $w=1$-ல் வெளிக்கோணம் 2π ஆக இருக்க வேண்டும். அதாவது C'-ன் வால் பகுதி மிகவும் கூர்மையாக இருக்கவேண்டும்.

குறிப்பு 1: C-ஆனது $|z|=1$ என்ற வட்டத்தை உள்ளடக்கியது. $|z|=1$-ன் பிம்பமானது $w=-1$-ஐயும், $w=1$-ஐயும் இணைக்கும் கோடாகும். எனவே, C ஆனது சுருங்கி $|z|=1$ ஆனால், C' ஆனது $w=-1$-ஐயும் $w=1$ ஐயும் இணைக்கும் நேர் கோடு ஆகும்.

குறிப்பு 2: C' ஆனது ஆகாய விமானத்தின் குறுக்குவெட்டுத் தோற்றமாக இருப்பதால் 'air foil' என்று அழைக்கப்படும். ஜூகௌஸ்கி இதனை 'aerodynamics'-ல் (வெளி இயக்க விசை இயல்) பயன்படுத்தியதால் இதனை ஜூகௌஸ்கி மாற்றம் என்று சொல்வோம்.

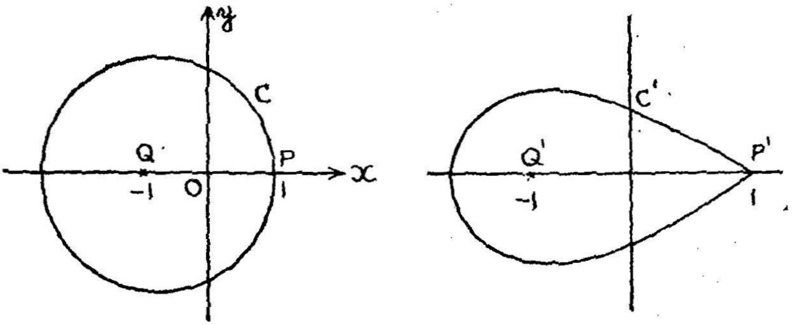
குறிப்பு 3: C ஆனது $z=1$ வழியே சென்று, $z=-1$-ஐ உட்புறமாகக் கொண்டு, அதன் மையத்தை மேல்தளத்தில் கொண்டுள்ளதாயும், $|z|=1$ என்ற வட்டத்தினை முழுவதுமாக உள்ளடக்காமலும் இருந்தால் என்னவாகும்? C' ஆனது $|z|=1$-ன் பிம்பமான $(-1, 1)$-ஐ இணைக்கும் கோடான $P'Q'$-ஐ முழுவதுமாக உள்ளடக்காது.

6·35 ஜூகௌஸ்கி (Joukowski) உருமாற்றம்

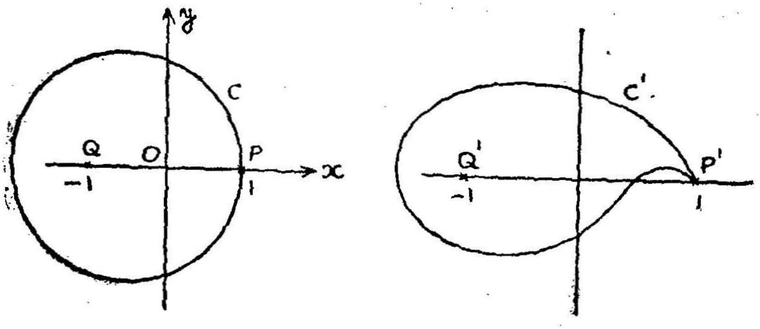
C என்ற z-தளத்திலுள்ள வட்டம் $z=-1$-ஐத் தன் உட்புறம் கொண்டதாயும், $z=1$ வழியே செல்வதாயும் இருக்கட்டும். அதன் மையம் மெய்யச்சிலிருந்தால்

$$w = f(z) = \tfrac{1}{2}(z + 1/z)$$

என்ற மாற்றத்தால் w-தளத்தில் C-யின் பிம்பம் என்ன?



படம் 47



படம் 48

$$w = f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \dots + \frac{f^n(a)}{n!}(z-a)^n + \dots$$

என்ற டெய்லர் தொடரில் $f^n(a) \neq 0$ ஆகவும், $k=0, 1, 2, \dots, (n-1)$ ஆனால் $f^k(a)=0$ ஆகவும் இருந்தால் z-தளத்தில் $z=a$-ல் உள்ள உச்சிக்கோணங்கள் w-தளத்தில் n-மடங்கு அதிமாகும் என்பதை நோக்குக. ... (1)

இப்பொழுது $\dfrac{dw}{dz} = \frac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{z^2}\right)$

$z=1$-ல் $\dfrac{dw}{dz} = 0$ ஆகையால் $z=1$ ஒரு சிறப்புப் புள்ளியாகும்.

பயிற்சி 6, (இரண்டாம் பாகம்)

1. சுவார்ட்ஸ் கிறிஸ்டோஃபல் உருமாற்றத்தை

$$w = A\int_{z_0}^{z} (z-x_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi}-1}(z-x_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi}-1}\dots(z-x_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi}-1}\,dz + B \quad \dots (1)$$

என எழுதலாம் என நிரூபி.

இதில் $A = \dfrac{k}{(-x_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi}-1}}$ எனக் கொண்டு, $x_n \to \infty$ ஆனால் கடைசிக் காரணி 1 ஆகிறது என நிரூபி.

2. w-தளத்திலுள்ள ஒரு பலகோணத்தை t-தளத்திலுள்ள அலகு வட்டமாக மாற்று. வினா 1-ல் உள்ள மாற்றம், பலகோணத்தை z-தளத்தின் மேல் பாதியாக்கும்.

$$t = \frac{i-z}{i+z} \text{ அல்லது } z = i\,\frac{(1-t)}{(1+t)}$$

அதை அலகு வட்டமாக்கும்.

$x_1, x_2, \ldots x_n$ என்பவை $t_1, t_2, \ldots, t_n$ ஆனல்

$$z - x_k = i\left(\frac{1-t}{1+t}\right) - i\,\frac{(1-t_k)}{(1+t_k)}$$ ஆகும்.

மேலும் $dz = -2i\, dt \,/\, (1+t)^2$ ஆனதால்

$$w = A' \int (t-t_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi}-1} \cdots (t-t_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi}-1} dt + B$$

என்பது வேண்டிய மாற்றமாகும்.

3. w-தளத்தில் PQR என்ற $\triangle$ உள்ளது. P என்பது $(0,0)$; Q ஆனது $(1,0)$. $\angle RPQ = \alpha$; $\angle RQP = \beta$. இப்பொழுது, P-ஐ ஆதியாகவும், Q-வை 1 ஆகவும், R-ஐ ∞-ஆகவும் மாற்றும் உருமாற்றத்தைக் கண்டுபிடி.

விடை

$$w = \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{\pi}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)\Gamma\left(\frac{\beta}{\pi}\right)} \int_0^z t^{\frac{\alpha}{\pi}-1} (1-t)^{\frac{\beta}{\pi}-1} dt.$$

4. a என்பது மெய்யெண். $|z-a| = 1+a$ என்ற வட்டத்தை எடுத்துக் கொள்.. $(a > 0)$, $w = z + \frac{1}{z}$ என்ற மாற்றத்தினல்,

(i) w-தளத்தில் u-அச்சைப் பொறுத்துச் சமச்சீரான வளைகோடு கிடைக்கும்.

(ii) $z = -1$ ஆனல் $\frac{dw}{dz} = 0;\quad \frac{d^2w}{dz^2} \neq 0.$

(iii) $w = -2$-ல் ஏற்படும் கோணம் ஏறத்தாழ 2π ஆகும் என்றும் நிருபி.

இது ஒரு ஜூகௌஸ்கி மாற்றம் என்பதைப் படம் வரைந்து காட்டு.

5. $$w = \exp \frac{3\pi i}{4} \int_0^z (t+1)^{-3/4}\, t^{-1/2} (t-1)^{-3/4}\, dt$$

என்ற மாற்றத்தால் கிடைக்கும் முக்கோணத்தின் உச்சிப்புள்ளிகள் *ib, O, b* என நிரூபி. இதில் $2b = B(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ என்றும் நிரூபி.

6. $$w = i \int_0^z (t+1)^{-1/2}\, t^{-1/2} (t-1)^{-1/2}\, dt$$

என்ற மாற்றம் *x*-அச்சை *ib, O, b, b+ib*-ஐ உச்சிப் புள்ளிகளாகக் கொண்ட சதுரமாக மாற்றுகிறது என நிரூபி.

மேற்கோள் நூற்பட்டியல்

(Bibliography)

1. AHLFORS, L. V., Complex Analysis, McGraw Hill Book Co. Inc.

2. COPSON, E. T., Theory of Functions of a Complex Variable, O.U.P.

3. FORSYTH, A.R., Theory of Functions of a Complex Variable, Cambridge University Press.

4. HILLE, E., Analytic Function Theory, Ginn & Company.

5. KNOPP, K., Elements of the Theory of Functions, Dover Publications.

6. MAC ROBERT, T.M., Functions of a Complex Variable, MacMillan & Co. Ltd.

7. NEHARI, Z, Conformal Mapping, McGraw Hill Book Co. Inc.

8. TITCHMARSH, E.C., Theory of Functions, O.U.P.

9. WHITTAKER, E.T. and G. N. WATSON, Modern Analysis, Cambridge University Press.

கலைச்சொற்கள்

A

Absolute convergence — அறவொருங்கல்
Analytic function — பகுமுறைச் சார்பு
Argument — வீச்சம்
Argument Principle — வீச்சத்தின் தத்துவம்

B

Boundary — வரம்பு
Branch cut — கிளைவெட்டு (அல்லது பிளவு)
Branch point — கிளைப்புள்ளி

C

Closed contour — அடைத்த வளைகோடு
Closed region — அடைத்த அரங்கம்
Complex number — கலப்பெண்
Conformal mapping — கோணம் மாறு (உரு) மாற்றம்
Connected region — தொடுக்கப்பட்ட அரங்கம்
Contour integral — வளைகோட்டு வழித் தொகையீடு

D

Derivative — வகைக்கெழு

E

Entire function — பூரணச் சார்பு
Exponential function — அடுக்குக் குறிச் சார்பு

H

Harmonic function — இசைச் சார்பு
Harmonic conjugate — இசை இணை

I

Indefinite integral — வரையறுக்கப்படாத தொகையீடு
Infinite point — முடிவிலிப் புள்ளி

Interior point — உட்புறப் புள்ளி
Inverse points — நேர்மாறான புள்ளிகள்
Isogonal mapping — கோண அளவு மாறா மாற்றம்

J

Jordan arc — ஜார்டன் வில்
Jordan curve — ஜார்டன் வளைகோடு

L

Limit point — எல்லைப் புள்ளி

M

Maximum Modulus Theorem — உச்ச மட்டுத் தேற்றம்
Minimum Modulus Theorem — மீச்சிறு மட்டுத் தேற்றம்
Multiple valued function — பல்மதிப்புடைச் சார்பு
Multiply connected domain — பல்வகையாகத் தொடுக்கப்பட்ட அரங்கம்

N

Neighbourhood — சுற்றுப்புறம்

O

One-to-one correspondence — ஒன்றுக்கொன்று இசைவு
Order of poles — துருவங்களின் தரம்

P

Point at infinity — முடிவிலியில் உள்ள புள்ளி
Power series — அடுக்குத் தொடர்
Principal value — முதல் (பிரதம) மதிப்பு

R

Residue Theorem — எச்சத் தேற்றம்

S

Singular points — சிறப்புப் புள்ளிகள்
—essential — சாரமான
—isolated — தனித்த
—removable — நீக்கக்கூடிய

U

Uniform convergence — ஒருசீராக ஒருங்கல்

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

சென்னை-600 031

★

தமிழில் பயில்பவர்க்குக் கல்லூரிப் பாடநூல்கள்

(Tamil Medium Books for Colleges)

1976 ஜனவரி வரை 700 நூல்கள் வெளியிடப்பட்டுள்ளன.

★

மேலும், விரைவில் வெளிவருபவை

பொறியியல்	—	38	நூல்கள்
மருத்துவம்	—	18	,,
இயற்பியல்	—	23	,,
வேதியியல்	—	20	,,
தாவரவியல்	—	13	,,
விலங்கியல்	—	14	,,
கணிதம்	—	17	,,
வணிகவியல்	—	37	,,
பொருளாதாரம்	—	21	,,
புவியியல்	—	11	,,
வரலாறு	—	29	,,
மனையியல்	—	1	,,
தத்துவம்	—	4	,,
உளவியல்	—	8	,,
புள்ளியியல்	—	8	,,
கல்வி	—	15	,,
நிலப்பொதியியல்	—	6	,,
அரசியல்	—	19	,,

கிடைக்குமிடம் :

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனக் கிடங்கு

(கல்லூரிக் கல்வி இயக்குநர் அலுவலகச் சுற்றுக்குள்)

கல்லூரிச்சாலை, நுங்கம்பாக்கம்,

சென்னை-600 006.

கல்லூரிப் பாடநூல்களுக்கு 20% கழிவு வழங்கப்படும்.